

# MATEMATIIKAN OPETTAJANKOULUTUKSEN ARVIOINTIPOHJAINEN KEHITTÄMINEN

Mika Koponen, Mervi Asikainen, Antti Viholainen ja Pekka E Hirvonen  
Itä-Suomen yliopisto, fysiikan ja matematiikan laitos

Abstract Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) opettajantiedon mallin mukaan opettajat tarvitsevat kuudenlaista tietoa matematiikan opettamisessa. Selvitimme kyselytutkimuksen avulla opettajankouluttajien (N=19) ja työssä olevien matematiikanopettajien (N=101) näkemyksiä Itä-Suomen yliopiston matematiikan opettajankoulutusohjelman kehittämisen perustaksi. Kyselyn suunnittelussa ja aineiston analysoinnissa hyödynsimme MKT-mallin osa-alueita. Tulosten perusteella valtaosa opettajankouluttajista koki, että heidän opettamansa kurssit eivät parhaalla mahdollisella tavalla tue opettajankoulutuksen tavoitteita, esimerkiksi opetussisältöjen osalta. Monet työssä olevat matematiikanopettajat näkivät asian samalla tavoin. Heidän mukaansa matemaattisten sisältöjen opetuksen painopisteenä on niin sanottu puhdas matematiikka (Common Content Knowledge), joskin myös siinä oli pieniä puutteita. Useat työssä olevat matematiikan opettajat esittivät, että koulutusohjelman tulisi sisältää nykyisten sisältöjen lisäksi opettajan työn kannalta tärkeää erityistä matemaattista tietoa (Specialized Content Knowledge). Vastanneiden opettajien mielestä ainelaitoksen opintoja tulisi eriyttää tulevien opettajien ja tulevien matemaatikoiden osalta. Artikkelissamme saatuja tuloksia käsitellään ainelaitoksen toiminnan näkökulmasta, samoin kerromme millaisia kehittämistoimenpiteitä tehtyjen johtopäätösten pohjalta on jo toteutettu.

## 1 Johdanto

Suomalaisten nuorten matematiikan osaaminen on laskenut. Viimeisen kymmenen vuoden aikana TIMSS-tuloksissa tapahtunut muutos vastaa noin yhden kouluvuoden osaamisen heikentymistä (Kupari, Vettenranta & Nissinen, 2012). Vastaava trendi on nähtävissä myös PISA-tuloksissa. Viimeisen kymmenen vuoden aikana PISA-tuloksissa tapahtunut muutos vastaa puolen kouluvuoden edistymisen heikentymistä (Kupari, Välijärvi, Andersson, ym., 2013). Samaan aikaan myös oppilaiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan on laskenut (Räsänen & Närhi, 2013; Metsämuuronen, 2013). Tuohilammen ja Hannulan (2013) mukaan matematiikan osaaminen ennustaa usein asenteita oppiainetta kohtaa – mitä huonommin matematiikkaa osataan sitä vähemmän se kiinnostaa. Opetus- ja kulttuuriministeriön mukaan raportoiduista muutoksista on syytä huolestua (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2012 & 2013). Ongelmaa pyritään ratkaisemaan muun muassa koulutason opetussuunnitelmia uudistamalla, mutta samalla katseita tulisi kohdistaa myös opettajankoulutuksen kehittämiseen.

Opettajankoulutus vaikuttaa siihen kuinka opetusta toteutetaan kouluissa (Adler & Jaworski, 2009). Vaikutukset voivat olla sekä positiivisia että negatiivisia, sillä opettajan tiedollinen osaaminen vaikuttaa opettajan opetustapaan ja opettajan opetustapa vaikuttaa oppilaiden oppimiseen (ks. Stein, Baxter, & Leinhardt, 1990; Hill, Rowan & Ball, 2004; Hill

& Ball, 2004). Tutkimusten mukaan hyviä oppimistuloksia ja myönteisiä matematiikka-asenteita edistävät esimerkiksi yhteistoiminnalliset opetusmenetelmät (Tuohilampi & Hannula, 2013), joita tulisi hyödyntää myös yliopistojen opettajankoulutuksessa. Koska opettajankoulutus vaikuttaa siihen mitä luokkahuoneissa tapahtuu, on opettajankoulutuksen kehittäminen eräs parhaista tavoista kehittää koulussa tapahtuvaa toimintaa.

Itä-Suomen yliopiston matemaattisten aineiden opettajankoulutuksen kehittäminen nostettiin yliopistostrategiaan vuonna 2011. Systemaattinen tieteelliseen tutkimukseen perustuva arviointipohjainen matematiikan opettajankoulutuksen kehittämistyö aloitettiin vuonna 2012. Akateemisen vuoden 2012/2013 aikana selvitettiin opettajankouluttajien ja koulutuksesta valmistuneiden matematiikanopettajien näkemyksiä koulutusohjelman sisällöistä, opetusmenetelmistä ja kehittämistarpeista. Ensimmäiset kehittämistoimet toteutettiin ainelaitoksella jo seuraavana lukuvuonna.

Ainelaitoksilla tapahtuvan kehittämistoiminnan lisäksi pitkäjänteistä opettajankoulutusohjelmien kehittämistyötä tehdään myös Itä-Suomen yliopiston normaalikoulussa sekä soveltavan kasvatustieteen osastolla. Erityisesti aineenopettajan pedagogisten opintojen uudistustyö vuosien 2013 ja 2014 aikana tiivisti aineenopettajankoulutuksesta vastaavien eri tiedekunnissa toimivien yksiköiden yhteistyötä. Matematiikan oppiaine oli aktiivisesti mukana myös tämän kyseisen osa-alueen uudistamisessa. Tässä artikkelissa painottuu kuitenkin tietoisesti ainelaitoksen rooli, vaikka esiteltävät tulokset osittain sivuavat myös harjoittelukoulun ja soveltavan kasvatustieteen opetuksesta muodostuneita käsityksiä. Tutkimuksessa tarkastelemme opettajankouluttajien ja koulutuksesta valmistuneiden matematiikanopettajien näkemyksiä valmistuneiden opettajien matematiikan sisältötiedon hallintaan ja ainelaitoksen opintosisältöihin liittyen. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Millaisena opettajankoulutuksesta valmistuneet matematiikanopettajat näkevät oman matemaattisen sisältötiedon osaamisensa ja ainelaitoksen opetussisällöt opettajan työn kannalta?
2. Millaisena opettajankouluttajat näkevät valmistuneiden matematiikanopettajien matemaattisen sisältötiedon osaamisen ja ainelaitoksen opetussisällöt opettajan työn kannalta?

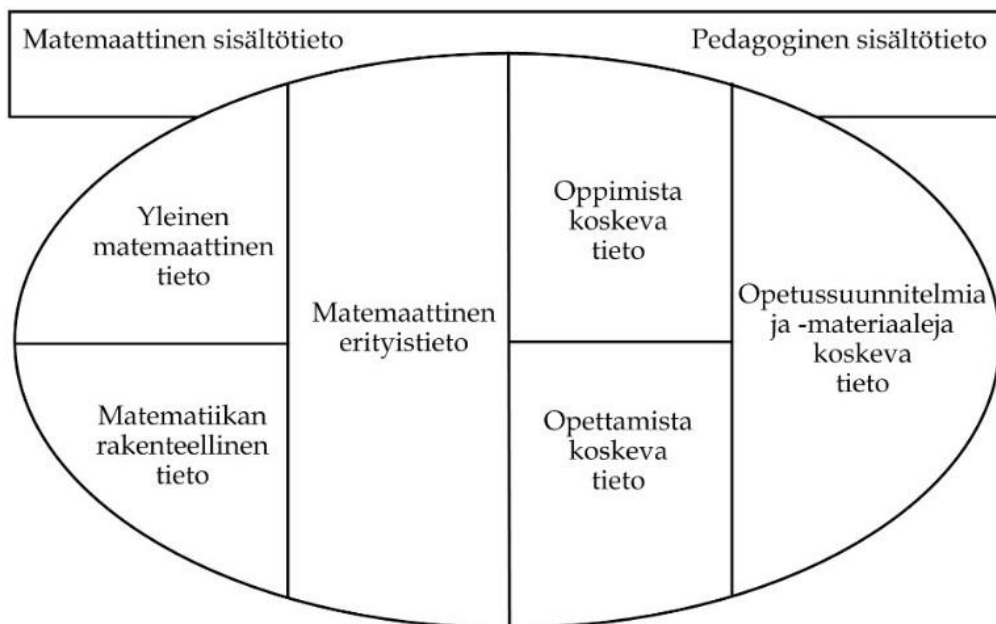
## 2 Teoreettinen viitekehys

Opettajankoulutuksen tavoitteena on antaa hyvät valmiudet matematiikan opettamiseen. *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) opettajantiedon mallin mukaan opettajat tarvitsevat kuudenlaista tietoa matematiikan opettamisessa (ks. Hill, Rowan & Ball, 2004; Hill & Ball, 2004; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008; Ball, & Bass, 2009). MKT-malli pohjautuu Shulmanin (1986) esittämään malliin, jonka mukaan kaikki opettajat tarvitsevat aineenhallintaa koskevaa tietoa (Subject Matter Knowledge) ja

*pedagogista sisältötietoa* (Pedagogical Content Knowledge). Michiganin yliopiston asiantuntijat ovat muokanneet Shulmanin mallia matematiikan opettamiseen sopivaksi.

MKT-mallissa matemaattisen sisältötiedon hallitseminen ei vaadi pedagogisen sisältötiedon hallintaa, mutta sen sijaan pedagogisen sisältötiedon hallitseminen vaatii matemaattista sisältötietoa (Hill, Ball & Schilling, 2008). Tämä voidaan tulkita siten, että opettajat eivät kykene omaksumaan riittävässä määrin pedagogista sisältötietoa ellei heillä ole riittävää matemaattisen sisältötiedon ymmärrystä.

MKT-mallin mukaan sekä opettajien tarvitsema aineenhallinta eli *matemaattinen sisältötieto* (Subject Matter Knowledge) että pedagoginen sisältötieto voidaan jakaa kolmeen osa-alueeseen (ks. Kuva 1). Seuraavaksi tarkastelemme näitä kuutta tiedonaluetta tarkemmin.



Kuva 1. Matemaattinen opettajantieto (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) sisältää kuusi osa-alueetta (Ball, Thames & Phelps, 2008).

*Yleinen matemaattinen tieto* (Common Content Knowledge). Matematiikanopettajan tulee tuntea opetettava matemaattinen aihe, siihen liittyvät käsitteet, tulokset ja niiden todistukset. Hänen tulee tuntea myös oppikirjojen sisällöt, tunnistaa virheelliset ratkaisut, epätarkat määritelmät ja oppilaiden väärät vastaukset (Ball, ym. 2008). Opettajan tulee osata käyttää matematiikkaa täsmällisesti sekä puhuessaan että kirjoittaessaan. MKT-mallin mukaan muun muassa edellä mainitut seikat vaativat opettajalta yleistä matemaattista tietoa. Yleinen matemaattinen tieto on sellaista matemaattista tietoa, jota tarvitaan matematiikanopettajan työn lisäksi myös muissa matematiikan osaamista hyödyntävissä ammateissa (mm. matemaatikot, insinöörit) (Hill, ym., 2008).

*Matemaattinen erityistieto* (Specialized Content Knowledge). Työssään matematiikanopettaja joutuu keksimään monenlaisia matemaattisia esimerkkejä ja käyttämään useita erilaisia matemaattisia esitystapoja. Opettajan tulee valikoida opetuksessa käytettävät tehtävät, arvioida millaista aiempaa tietoa niiden ratkaisemiseen

tarvitaan ja tarpeen tullen muokata tehtäviä helpommiksi tai vaikeammiksi (Ball, ym. 2008). MKT-mallin mukaan edellä kuvatut seikat vaativat sellaista matemaattista tietoa, joka on erityistä opettajan työn kannalta. Matemaattista erityistietoa tarvitaan esimerkiksi oppilaan koevastauksia arvioitaessa ja arvostellessa (Ball, ym. 2008). Arviointiperusteiden laatiminen ja ratkaisun pisteyttäminen vaatii siis sellaista matemaattista tietoa, jota ei tarvita muissa matematiikan osaamista vaativissa ammateissa. Matemaattinen erityistieto ei vaadi tietoa oppimisesta tai oppilaasta (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014), sillä esimerkiksi koevastausten arvostelu voidaan tehdä nimettömästi, koska se ei edellytä tietoa koevastausten tekijästä.

*Matematiikan rakenteellinen tieto (Horizon Content Knowledge).* Matematiikanopettajan tulee tuntea matematiikan rakenne: kuinka käsitteet kytkeytyvät toisiinsa, miten käsitteet muodostavat jonkin matematiikan osa-alueen ja kuinka matematiikan osa-alueet muodostavat kokonaisuuden. Lisäksi matematiikanopettajan tulee tuntea kuinka matematiikan käsitteet esitetään ja määritellään eri kouluasteilla. Esimerkiksi matematiikan oppikirjoissa käsitteet määritellään eri tavoin eri kouluasteilla ja usein siirryttäessä kouluasteelta toiselle matematiikan käsitteiden määritelmät täsmentyvät ja formalisoituvat. Matematiikan opetus on tehokkaampaa jos opetuksessa otetaan huomioon myös se kuinka matematiikka rakentuu eri kouluasteilla (Ball & Bass, 2009). MKT-mallissa tämän tyyppinen osaaminen vaatii matematiikan rakenteellista tietoa, joka käsittää sekä matematiikan rakenteeseen ja käsitteiden rakentumiseen liittyvän tiedon (Ball, ym. 2008; Ball & Bass, 2009).

*Oppimista koskeva tieto (Knowledge of Content and Students).* Opetusta suunnitellessaan opettaja voi hyödyntää tietoa yleisistä oppimisteorioista ja opettavaan aiheeseen liittyvistä haasteista, ja opettaja voi miettiä keinoja, joilla motivoida oppilaita. Esimerkiksi Pythagoraan lauseen opettaminen motivoivalla ja ongelmalähtöistä oppimista suosivalla tavalla oppilaiden aiheeseen liittyvät virhekäsitykset huomioiden vaatii laajaa matemaattista ja pedagogista tietämystä oppilaista, oppimisesta ja matematiikasta. MKT-mallin mukaisesti tämän tyyppinen osaaminen edellyttää oppimista koskevaa tietoa. Hillin ym. (2008) mukaan opettajan tulee olla tietoinen siitä kuinka oppilaat ajattelevat ja oppivat eri matematiikan aiheita. Opettaja tarvitsee oppimista koskevaa tietoa myös itse opetustilanteessa, sillä hänen tulee kuunnella ja reagoida oppilaiden puheeseen, vastata heidän esittämiin kysymyksiin ja arvioida oppilaiden matemaattista ajattelua (Petrou & Goulding, 2011).

*Opettamista koskeva tieto (Knowledge of Content and Teaching).* MKT-mallissa matematiikan oppimista ja opettamista koskevat tiedot nähdään omina osa-alueinaan. Oppituntia suunnitellessaan opettaja päättää missä järjestyksessä erilaiset toiminnot (opettajan esittämät esimerkit, tehtävien tekeminen, ryhmätyöskentely ym.) suoritetaan (Ball, ym. 2008; Petrou & Goulding, 2011). Opettaja saattaa myös järjestää luokkahuonetta siten, että se mahdollistaa erilaisten ryhmätyöskentelymenetelmien toteuttamisen. Opettaessaan opettajan tulee miettiä myös omaa rooliaan (esim. suoraviivainen

tiedonantaja, ohjaava opettaja, keskustelun johtaja) ja päättää mitä tietoa hän antaa oppilaille ja mitä tietoa hän jättää oppilaiden keksittäväksi. Opettaja myös päättää missä tilanteissa alkuperäisestä suunnitelmasta kannattaa poiketa esimerkiksi jonkin oppilaan esittämän asian tai kysymyksen korostamiseksi (Petrou & Goulding, 2011). Opettaja toimii siis kuin luokkahuoneen toimintojen koordinaattori, joka voi tarpeen vaatiessa tehdä muutoksia omaan rooliinsa ja tuntisuunnitelmaansa. Ballin ym. (2008) mukaan toimenpiteet, joita opettajat tekevät edistääkseen oppilaiden oppimista vaativat opettamista koskevaa tietoa.

*Opetussuunnitelmia ja -materiaaleja koskeva tieto (Knowledge of Content and Curriculum)*. Matematiikanopettaja tarvitsee tietoa siitä kuinka opetettava aihe kytkeytyy voimassa olevaan opetussuunnitelmaan. Mikäli opetussuunnitelmassa esitetään vaatimuksia oppilaiden osaamiselle, tulee opettajan arvioida kuinka oppilaiden osaamistaso saavutetaan. Opettaja valitsee ja käyttää opetuksessa erilaisia oppimateriaaleja (esim. oppikirjat ja muut materiaalit), opetusvälineitä (esim. liitutaulu, piirtoheitin) ja teknologiaa (esim. laskimet, tietokoneet, älytaulut.). Näiden opetuskäyttö vaatii toisaalta käyttötaitoa, mutta toisaalta pedagogista osaamista, sillä opettaja tekee päätöksen kuinka välineitä opetuksessa käytetään. Esimerkiksi tietokoneohjelmistoja hyödynnettäessä opettajan tulee arvioida myös oppilaan käyttötaitoa. Opetusteknologian käyttö vaatii opettajalta teknologian hallitsemisen lisäksi myös matemaattisen ja pedagogisen sisältötiedon hallintaa (Mishra & Koehler, 2009). MKT-mallin mukaan tämän tyyppinen osaaminen kuuluu opetussuunnitelmaa ja oppimateriaaleja koskevaan tietoon (Ball, ym. 2008).

MKT-mallin osa-alueita voidaan kuvailla opettajan toimilla, kuten aiemmin nähtiin, mutta opettajan toimia ei välttämättä voida asettaa vain yhteen osa-alueeseen. Usein esimerkiksi väärän vastauksen tunnistaminen vaatii yleistä matemaattista tietoa, virheen luonteen näkeminen erityistä matemaattista tietoa ja virheen yleisyyden tunnistaminen oppimista koskeva tietoa (Ball, ym. 2008). Opetuksen suunnittelu, toteutus ja toteutuneen opetuksen arviointi vaatii usein samanaikaisesti tietoa useista MKT-mallin osa-alueista (Ball, ym. 2008).

### 3 Menetelmä

Matematiikanopettajankoulutuksen kehittämiseen tähtäävässä tutkimuksessa hyödynnämme Design-Based Research tutkimuksen periaatteita (ks. Edelson, 2002; Design-Based Research Collective, 2003). Valittu strategia tarkoittaa, että ensin analysoimme koulutuksen nykytilaa, sen jälkeen arviointitietoa käytetään koulutuksen kehittämiseen ja lopuksi arvioidaan kehitystyön vaikutukset. Koska arvioinnista saadut tulokset toimivat lähtökohtana kehittämiselle, voidaan tutkimusstrategiaa kutsua myös opettajankoulutuksen *arviointipohjaiseksi kehittämiseksi*.

Tutkimusstrategian valinta ei rajoita aineiston keruu- tai analyysimenetelmiä, joten määrällistä ja laadullista aineistoa kerättiin samanaikaisesti. Eri aineistoista esiin nousevat näkökulmat täydentävät toisiaan. Samanaikaisesti kerätty määrällinen ja laadullinen

aineisto on yksi Mixed methods tutkimusasetelmista (Creswell & Clark, 2011). Keskeinen tekijä Mixed methods – tutkimuksessa on integraatio: määrällinen ja laadullinen aineisto yhdistyvät jossakin tutkimusprosessin vaiheessa (esim. aineistonkeruu, analysointi, tulkinta, johtopäätös). Näin ymmärrys tutkittavasta ilmiöstä syvenee ja laajenee. (Johnson, Onwuegbuzie & Turner, 2007; Tashakkori & Creswell, 2007). Yksittäisen lähestymistavan käyttöön verrattuna, Mixed methods – tutkimuksessa useiden lähestymistapojen yhteiskäytöllä ja erityisesti integraatiolla tavoitellaan parempaa ymmärrystä tutkimusongelmista (Creswell & Clark, 2007).

Tämä osatutkimus käsittelee opettajankoulutuksen arviointipohjaisen kehittämisen ensimmäistä vaihetta, jossa hankitaan tietoa koulutuksen nykytilasta.

### 3.1 Konteksti

Itä-Suomen yliopistossa matematiikan pääaineopiskelijoille tarjotaan kaksi linjaa, joista toisesta valmistuu matematiikanopettajaksi ja toisesta matemaatikoksi. Matematiikan aineenopettajankoulutusohjelma muodostuu kandidaatin tutkinnosta (180 op) ja maisterin tutkinnosta (120 op). Opettajan kelpoisuuteen vaaditaan molemmat tutkinnot. Aineenopettajantutkintoon kuuluu opintoja pääaineesta, pedagogisia opintoja ja yleensä yhden tai kahden sivuaineen opinnot. Matematiikan pääaineopintojen (130 op) sisältö sopii sekä opettajaopiskelijoille että matemaatikoille: kurssien aiheina ovat muun muassa calculus, analyysi, algebra ja differentiaaliyhtälöt.

Sivuaineiksi opettajaopiskelijat voivat valita mitä tahansa muita koulussa opetettavia aineita, mutta tyypillisimmin sivuaineopinnot muodostuvat fysiikan (60 op) ja kemian opinnoista (60 op). Opettajan pedagogiset opinnot (60 op) sisältävät teoriaa oppimisesta ja opettamisesta (30 op), matematiikan ainedidaktiikkaa (10 op) ja opetusharjoittelua (20 op). Suoritettu tutkinto antaa pätevyyden opettaa pää- ja sivuaineita peruskoulussa, lukiossa ja ammatillisessa oppilaitoksessa.

### 3.2 Kohderyhmät

Keräsimme aineiston kahden sähköisen kyselytutkimuksen avulla akateemisen vuoden 2012/2013 aikana. Toinen kysely lähetettiin kaikille Itä-Suomen yliopistosta vuosina 2002–2012 valmistuneille matematiikanopettajille. Matematiikanopettajista 54 % (N=101) vastasi kyselyyn. Yhtä vastaajaa lukuun ottamatta kaikilla vastaajilla on joko aiempaa opetusalan työkokemusta tai he toimivat opettajina, joten vastaajista käytetään nimitystä *työssä olevat matematiikanopettajat*. Toinen kysely lähetettiin kaikille Itä-Suomen yliopiston nykyisille opettajakouluttajille matematiikan opinnoista ja pedagogisista opinnoista vastaaville opettajille sekä normaalikoulun opetusharjoittelun ohjaajille. Opettajankouluttajista 79 % (N=19) vastasi kyselyyn. *Pedagogisten opintojen opettajankouluttajien ja opetusharjoittelun ohjaajien* näkemyksiä ei tarkastella erikseen vaan tämä vastaajajoukko yhdistetään vastaajien anonymiteetin säilyttämiseksi.

### 3.3 Kysely

Matematiikan opettajankoulutuksen arviointiin soveltuva kysely laadittiin itse kirjallisuuteen perustuen, sillä riittävän laajaa, MKT-malliin pohjautuvaa ja suomalaisen opetussuunnitelman piirteitä huomioon ottavaa kyselyä ei ollut saatavilla. Kysely sisälsi väittämiä opettajantietoon liittyen sekä avoimia kysymyksiä opettajankoulutuksen sisällöistä, menetelmistä ja kehittämistarpeista. Väittämillä selvitettiin MKT-mallin osa-alueiden painoarvoa opettajankoulutuksessa. Avoimet kysymykset liittyivät yleisemmin opettajankoulutuksen sisältöihin, menetelmiin ja niiden kehittämiseen, mutta myös niiden analysoinnissa käytettiin MKT-mallia.

Opettajantiedon väittämät muodostettiin MKT-malliin liittyvän kirjallisuuden (esim. Ball, ym., 2008; Ball, Hill & Bass, 2005; Petrou & Goulding, 2011) ja voimassa olevan lukion opetussuunnitelman pohjalta (Opetushallitus, 2003). Opetussuunnitelmasta poimittiin esimerkiksi kaikki lukion pakolliset opetussisällöt (esim. geometria, tilastomatematiikka) ja niistä muodostettiin yhteensä kaksitoista väittämää. MKT-mallissa opetussisällöt luokitellaan yleiseksi matemaattiseksi tiedoksi (Ball, ym. 2008). Opetussuunnitelman yleisistä tavoitteista muodostettiin myös väittämiä ja niitä luokiteltiin tapauskohtaisesti. Esimerkiksi oppilaan ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen nousi esiin opetussuunnitelmassa, mikä MKT-mallin mukaan vaatii opettajalta opettamista koskevaa tietoa. Muodostimme myös yleisempiä opettajan työhön liittyviä väittämiä vaikka niitä ei suoranaisesti mainittu opetussuunnitelmassa. Opettajat joutuvat usein esimerkiksi mittamaan oppilaiden osaamista, johon saattaa liittyä kokeiden laatimista ja korjaamista. MKT-mallin mukaan kokeiden laatiminen ja korjaaminen vaatii opettajalta erityistä matemaattista tietoa (Ball, ym. 2008).

Opettajantietoväittämiä muodostettiin yhteensä 72. Matemaattiseen sisältötietoon ja pedagogiseen sisältötietoon liittyviä väittämiä oli kyselyssä saman verran. Määrällisesti väittämät painottuivat mittamaan erityisesti neljää osa-aluetta (yleinen ja erityinen matemaattinen tieto sekä oppimista ja opettamista koskeva tieto), sillä nämä osa-alueet ovat empiirisesti testattuja ja paremmin käsitteellistettyjä (Sleep, 2009).

Työssä olevien matematiikanopettajien tuli arvioida väittämiä viisiportaisella Likert-asteikolla<sup>1</sup> näkökulmasta *"Kuinka hyvät tiedot/taidot opettajankoulutus antoi sinulle kyseisen väittämän suhteen?"* Opettajankouluttajat arvioivat vastaavalla asteikko väittämiä näkökulmasta *"Kuinka hyvät tiedot/taidot opettamasi kurssi antoi opiskelijalle kyseisen väittämän suhteen?"*. Tässä artikkelissa tarkastellaan vain matemaattisen sisältötiedon väittämiä, sillä ne keskittyvät pääosin juuri ainelaitoksen opetustavoitteisiin.

Avoimet kysymykset käsittelivät opetussisältöjä, menetelmiä ja niiden kehittämistä ainelaitoksella, pedagogisissa opinnoissa ja opetusharjoittelussa. Tässä artikkelissa rajoitutaan tarkastelemaan kahta ainelaitoksen kehittämiseen liittyvää avointa kysymystä. Työssä oleville opettajille esitettiin avoin kysymys *"Arvioi ainelaitoksen matematiikan*

---

<sup>1</sup> 1=ei lainkaan, 2=heikot, 3=tyydyttävät, 4=hyvät, 5=erinomaiset

*kurssisisältöjen hyödyllisyyttä opettajan työn kannalta". Vastaavasti ainelaitoksen opettajankouluttajia pyydettiin vastaamaan avoimeen kysymykseen "Arvioi opettamiesi kurssien hyödyllisyyttä opettajan työn kannalta."*

### 3.4 Aineiston analysointi

Kaikille kyselyn väittämille laskettiin aluksi kaksi keskiarvoa eli opettajankouluttajille ja työssä oleville matematiikan opettajille omansa. Koska opettajankouluttajien opetustavoitteet ainelaitoksella, pedagogisissa opinnoissa ja opetusharjoittelussa ovat varsin erilaiset, haluttiin näiden ryhmien välinen ero esiin, joten ainelaitoksen asiantuntijoiden ja pedagogista opinnoista ja harjoitteluista vastaavien asiantuntijoiden vastaukset eroteltiin omiksi ryhmikseen. Tulee huomata, että vaikka vastaajamäärä on varsin pieni pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun osalta, on aineisto silti kattava.

Avoimet kysymykset analysointiin aineistolähtöisesti (Tesch, 1990; Hickey & Kipping, 1996; Mayring, 2000; Hsieh & Shannon, 2005). Hsieh ja Shannon (2005) ovat tunnistaneet kolme erilaista tapaa toteuttaa aineistolähtöinen analyysi. Näistä tavoista kahta käytettiin tässä tutkimuksessa. Aineistosta nousi voimakkaasti esille vastaajien suhtautuminen opetussisältöihin, joten ensin vastaajat luokiteltiin aineistolähtöisesti (*Conventional Content Analysis*) neljään luokkaan heidän suhtautumisensa mukaan (positiivinen, neutraali, negatiivinen ja kehittäminen). Suurin osa työssä olevista opettajista sijoittui kehittämisenluokkaan, sillä he näkivät, että ainelaitoksen opetussisältöjä tulisi kehittää. Toiseksi heidän esittämänsä kehittämisideat analysoitiin teorialähtöisesti (*Direct Content Analysis*) käyttäen luokittelussa MKT-mallin kuutta osa-aluetta.

Tässä tutkimuksessa tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan *triangulaation* keinoin. Triangulaatio tarkoittaa erilaisten menetelmien ja näkökulmien samanaikaista käyttöä, joilla syvennetään ja laajennetaan tutkimuskohteesta saatavaa tietoa ja siten vahvistetaan myös tutkimuksen luotettavuutta (ks. Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2006). Tutkimustuloksia tarkastellaan myös opettajantiedon näkökulmasta, sillä MKT-mallia on sovellettu tutkimuksen suunnittelussa ja sekä määrällisen että laadullisen aineiston analyysissä.

## 4 Tulokset

Tulosten esittely jakaantuu kahteen osaan. Ensin käymme läpi kyselyssä käytettyjen väittämien avulla saadut tulokset. Toisessa osiossa käsittelemme avoimien kysymysten avulla kerätyt näkemykset ainelaitoksen tarjoamien kurssien hyödyllisyydestä.

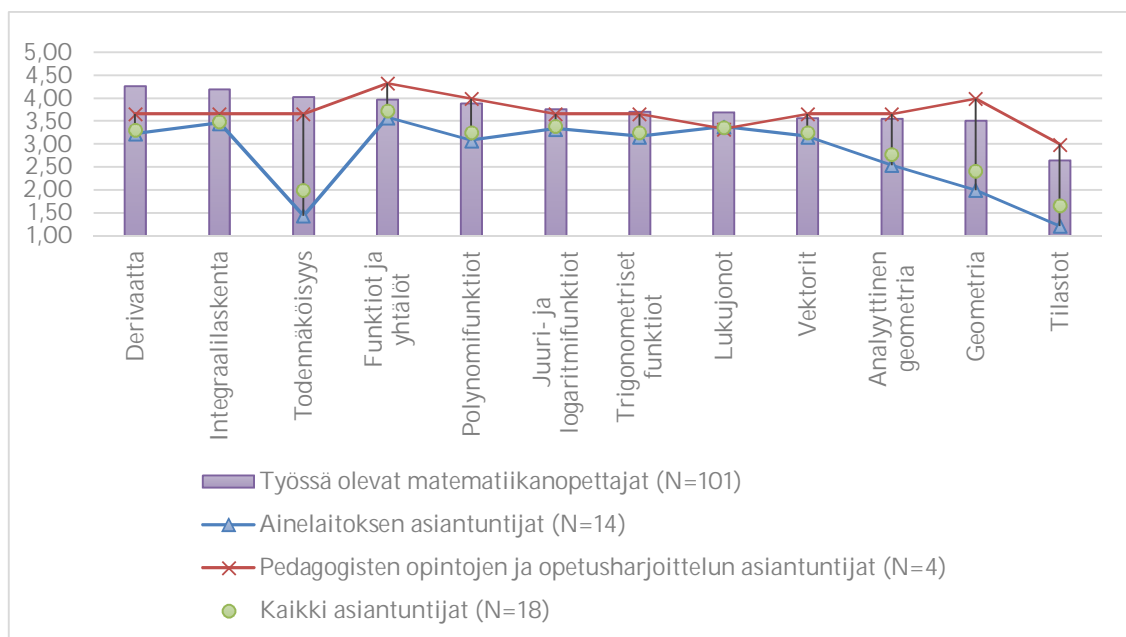
### 4.1 Yleisen matemaattisen tiedon osaaminen

Yleiseen matemaattiseen tietoon liittyviä väittämiä tarkastellaan kahdessa osassa (Kuva 2 ja Kuva 3). Kuvassa 2 on esitetty matematiikan aihealueiden hallintaa kuvaavat tulokset. Tulosten perusteella työssä olevat matematiikanopettajat sekä pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajat näkevät aihealueiden oppimisen melko samalla tavalla. Todennäköisyyslaskenta ja analyysiin linkittyvät aiheet, kuten derivaatta- ja



integraalilaskenta sekä erilaiset funktiot, osataan vahvimmin. Heidän näkemystensä perusteella geometria ja tilastomatematiikka jäävät kuitenkin heikommalle osaamiselle. Ainelaitoksen opettajankouluttajien näkemykset eroavat muiden vastaajien näkemyksistä erityisesti todennäköisyyslaskennan, geometrian ja tilastomatematiikan suhteen. Muihin vastaajiin verrattuna ainelaitoksen opettajankouluttajat arvioivat, että näitä aiheita osataan heikommin.

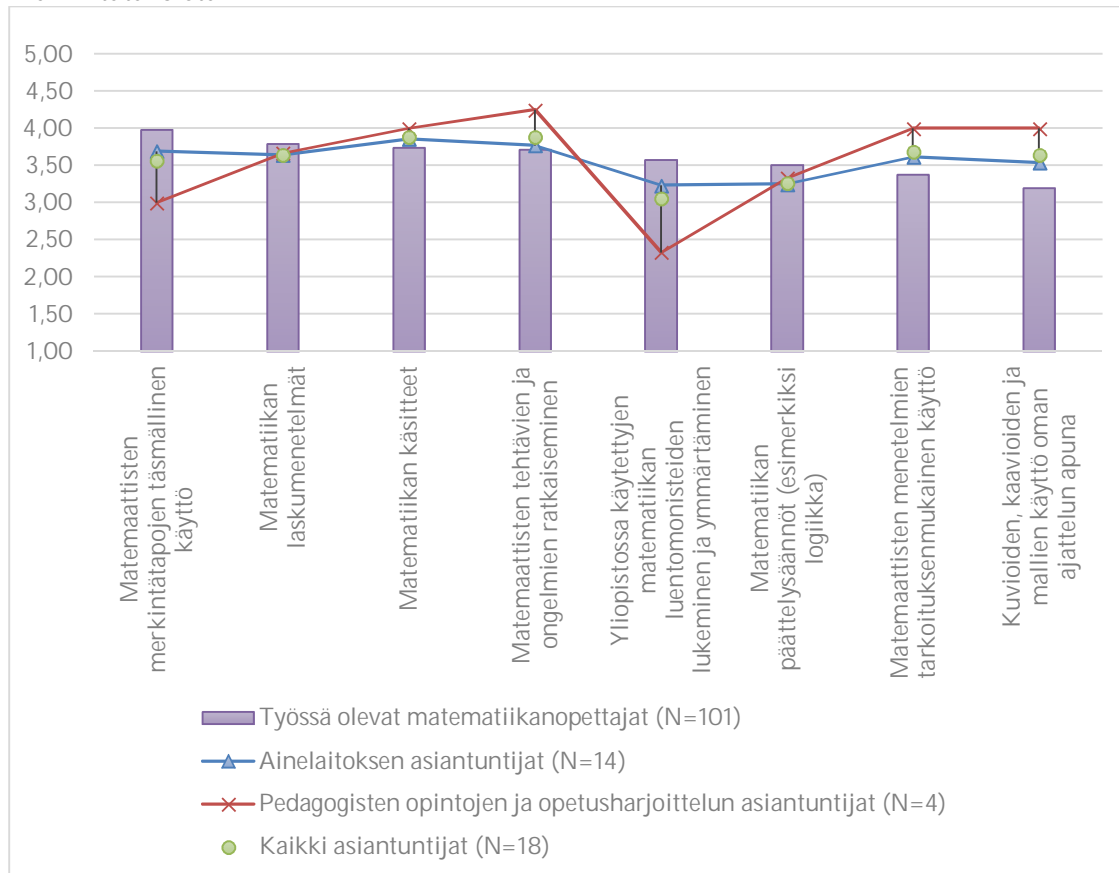
Opettajankoulutusohjelmassamme analyysin aiheita käsitellään useilla eri kursseilla, ja niiden opetuksesta vastaavaa useita opettajankouluttajia. Geometriaa ja todennäköisyyslaskentaa käsitellään tyypillisimmin vastaavan nimisillä kursseilla, joiden opetuksesta vastaa vain pari opettajankouluttajaa. Koska analyysin aiheista vastaavia opettajankouluttajia on geometriaan ja todennäköisyyslaskentaan verrattuna enemmän, on vastaavien opettajien määrä luonteva selitys myös pienemmille keskiarvoille näiden kyseisten aiheiden osalta. Näitä kahta aihetta tarkasteltaessa työssä olevat matematiikanopettajat kokevat osaavansa todennäköisyyslaskentaa geometriaa paremmin. Tuloksista nähdään, että kaikki vastaajat arvioivat tilastomatematiikan osaaminen heikoimmaksi muihin aiheisiin verrattuna. Tilastomatematiikkaan keskittyvää erityiskurssia ei opettajankoulutusohjelmaan sisälly.



Kuva 2. Työssä olevien matematiikanopettajien ja opettajankouluttajien näkemyksiä matemaattisten aiheiden osaamisesta

Yleiseen matemaattiseen tietoon liittyviä tuloksia esitetään myös Kuvassa 3. Ainelaitoksen sekä pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajien näkemykset eroavat eniten yliopistossa käytettyjen matematiikan luentomonisteiden lukemisen ja ymmärtämisen osalta. Tulos on ymmärrettävä, sillä luentomonisteita käytetään oppimateriaaleina lähinnä ainelaitoksen kursseilla. Työssä olevat matematiikanopettajat

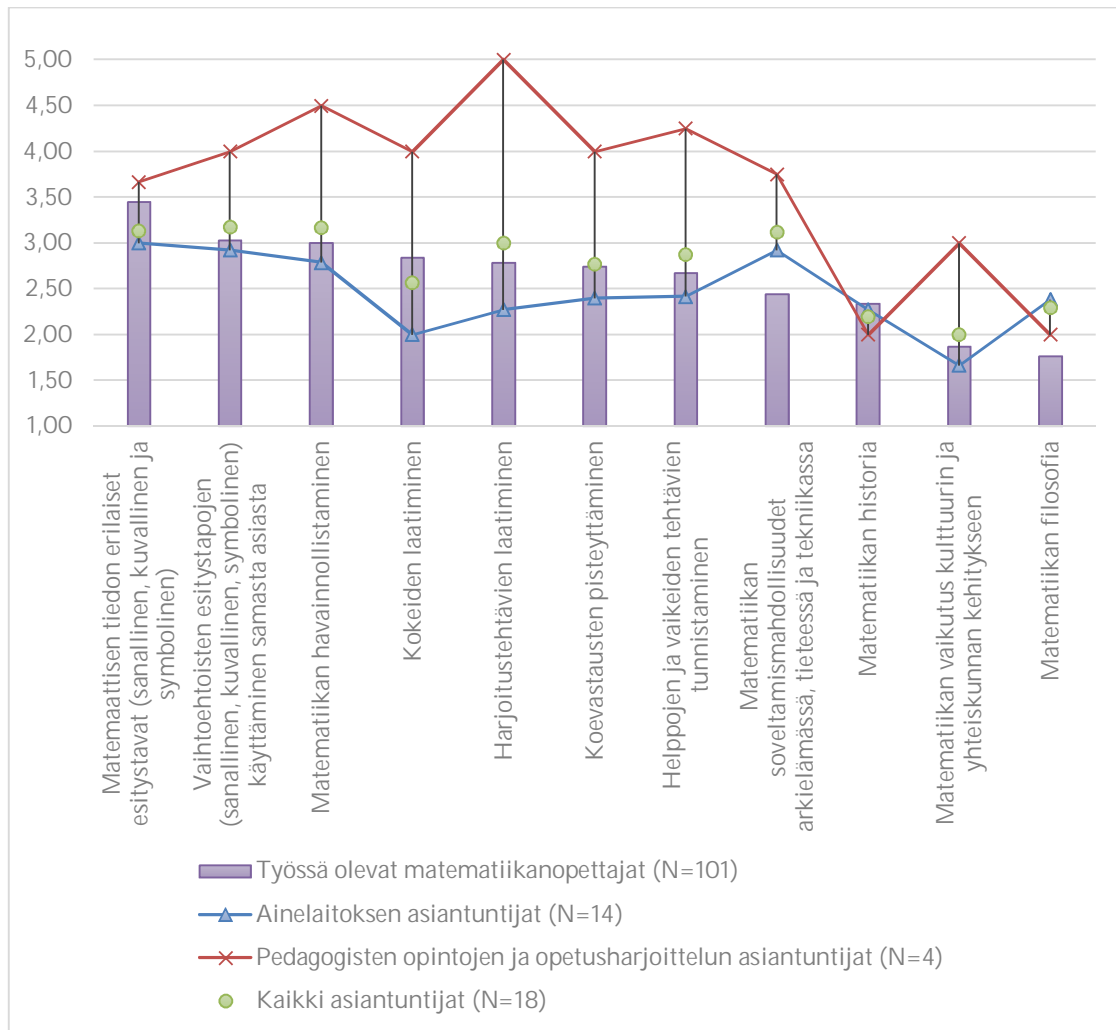
näkevät, että parhaimmat tiedot heillä on matematiikan laskumenetelmistä, käsitteistä ja merkintätavoista.



Kuva 3. Työssä olevien matematiikanopettajien ja opettajankouluttajien näkemyksiä yleisen matemaattisen tiedon osaamisesta

## 4.2 Erityisen matemaattisen tiedon osaaminen

Matemaattista erityistietoa käsittelevät tulokset on esitetty Kuvassa 4. Opettajankouluttajien näkemykset ainelaitoksella sekä pedagogisissa opinnoissa ja opetusharjoittelussa eroavat toisistaan tässä osa-alueessa. Pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajat arvioivat työssä olevien opettajien oppimisen tason korkeammaksi kuin ainelaitoksen opettajankouluttajat. Tulosten perusteella suurimmat erot ryhmien näkemysten välillä ovat matemaattisten harjoitustehtävien ja kokeiden laatimisen sekä kokeiden korjaamisen väittämässä. Perinteisesti näitä taitoja harjoitellaan enemmän pedagogisissa opinnoissa ja harjoittelussa kuin ainelaitoksen kursseilla.



Kuva 4. Työssä olevien matematiikanopettajien ja opettajankouluttajien näkemyksiä erityisen matemaattisen tiedon osaamisesta

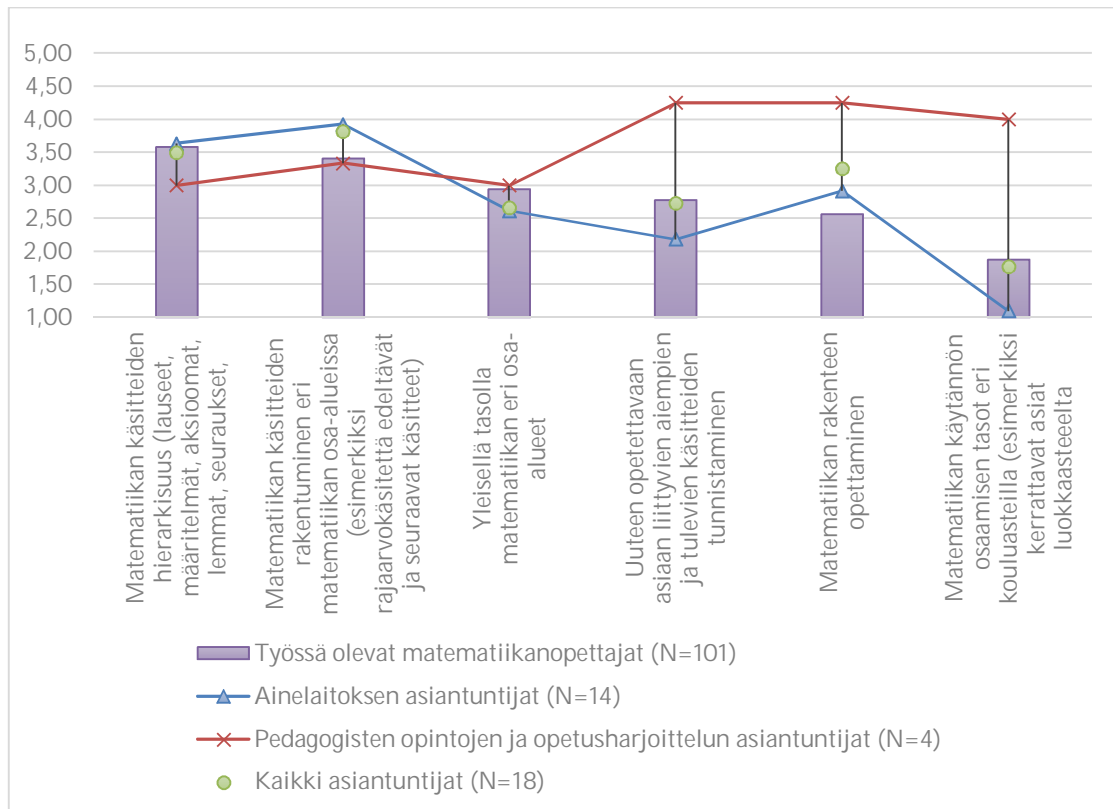
Työssä olevien matematiikanopettajien näkemyksissä on tietty loogisuus, sillä samansuuntaiset teemat nousevat esiin tarkasteltaessa väittämiä heikoimmasta vahvimpaan. Työssä olevien opettajien mukaan heillä on heikoimmat tiedot matematiikan filosofiasta, historiasta sekä matematiikan vaikutuksesta kulttuuriin ja yhteiskunnan kehitykseen. Samoin arvoivat matematiikan soveltamismahdollisuudet arkielämässä tieteessä ja tekniikassa matalammalle tasolle. Nämä tiedot liittyvät matemaattiseen yleissivistykseen eikä niiden merkitystä opettajantyössä ole ehkä niin helppo arvottaa. Opettajat arvioivat oppineensa paremmin helppojen ja vaikeiden tehtävien tunnistamisen, kokeiden ja tehtävien laatimisen sekä kokeiden korjaamisen. Nämä tiedot liittyvät matemaattisen osaamisen mittaamiseen, joka on opettajantyön keskeistä sisältöä. Parhaiten työssä olevat opettajat arvioivat oppineensa matematiikan esitysmuotoihin ja havainnollistamiseen liittyviä taitoja. Nämä tiedot ja taidot liittyvät matematiikan esittämiseen, joka on erittäin keskeistä päivittäisessä opettajantyössä.

Vertaamalla yleisen ja erityisen matemaattisen tiedon väittämien keskiarvoja voidaan havaita, että opettajat arvioivat oppineensa yleiseen matemaattisen tietoon liittyvät asiat

eritystä matemaattista tietoa paremmin. Lähes kaikki yleisen matemaattisen tiedon väittämät saivat korkeampia keskiarvoja työssä olevilta opettajilta kuin erityisen matemaattisen tiedon väittämät. Vastaava trendi on nähtävissä myös tässä erityisen matemaattisen tiedon väittämien järjestyksessä. Esimerkiksi tiedot matemaattisista esitysmuodoista ja taidot havainnollistaa matematiikkaa ovat tärkeää osaamista myös matemaatikoille, kun taas matemaattisen osaamisen mittaaminen tai tiedot matematiikan filosofiasta eivät välttämättä ole yhtä oleellista tietoa. Tämä osaltaan vahvistaa johtopäätöstä, että työssä olevien opettajat kokevat yleisen matemaattisen tiedon hallinnan vahvempana kuin erityisen matemaattisen tiedon hallinnan.

#### 4.3 Matematiikan rakenteellisen tiedon osaaminen

Matematiikan rakenteellisen tiedon osaamisen näkemykset on esitetty kuvassa 5. Pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun sekä ainelaitoksen opettajankouluttajien näkemykset risteävät matematiikan osa-alueisiin keskittyvän tiedon kohdalla. Ainelaitoksen opettajankouluttajat arvioivat, että opettamiensa kurssien perusteella tulevat opettajat saavat paremmat tiedot ko. väittämän vasemman puoleisista väittämistä, kun taas pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajat arvioivat, että oikean puoleisiin väittämiin sisältyvä tieto hallitaan paremmin. Mielenkiintoinen seikka tuloksissa on, että vasemman puoleiset tiedot ovat enemmän teoreettista tietoa, kun taas oikean puoleiset liittyvät enemmän käytännön osaamiseen. Suurin ero opettajankouluttajien välillä on tiedossa matematiikan käytännön osaamisesta eri kouluastella. Usein kokeneet opettajat pystyvät kertaamaan asioita esimerkiksi aloittavien seitsemäsluokkalaisten kanssa, sillä he tietävät kokemuksensa perusteella mitä asioita oppilaat yleensä osaavat hyvin tai huonosti. Tästä syystä aiheen käsittely on mahdollista esimerkiksi opetusharjoittelussa.



Kuva 5. Työssä olevien matematiikanopettajien ja opettajankouluttajien näkemyksiä matematiikan rakenteellisen tiedon osaamisesta

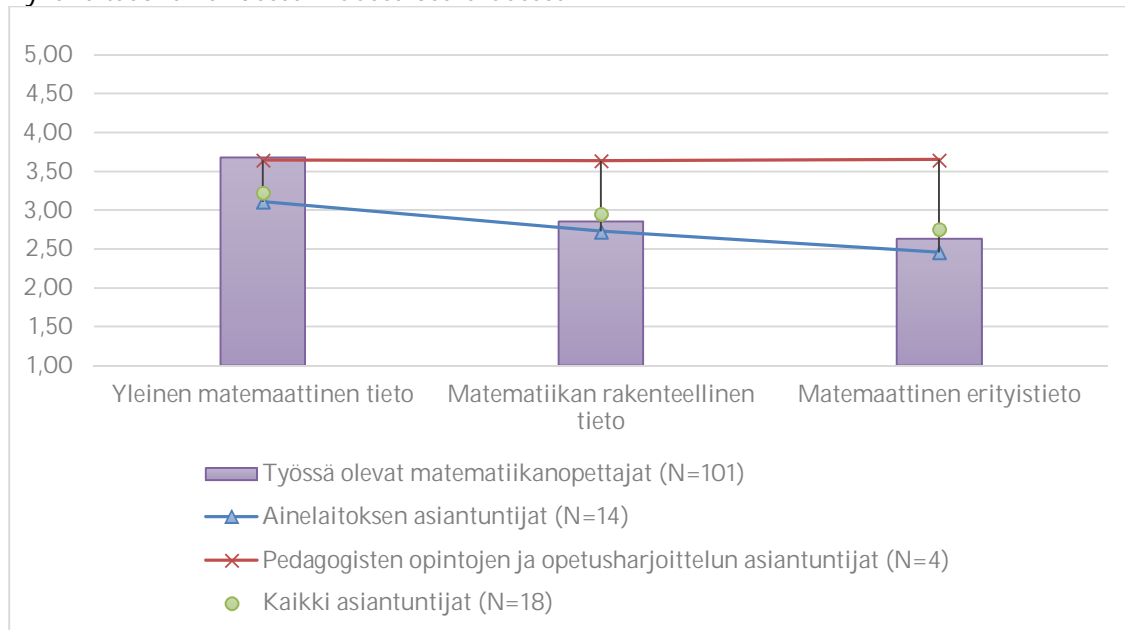
Työssä olevat matematiikanopettajat arvioivat saaneensa heikoimmat tiedot oppilaiden käytännön osaamisesta, matematiikan rakenteen opettamisesta sekä taidosta tunnistaa käsitteiden edeltäjät ja seuraajat. Paremmat tiedot he arvioivat saaneensa matematiikan osa-alueista, matematiikan käsitteiden hierarkkisuudesta ja käsitteiden toisiinsa linkittymisestä.

#### 4.4 Matemaattisen sisältötiedon osaaminen

Matemaattisen sisältötiedon osa-alueille laskettujen keskiarvojen perusteella aineenopettajankoulutuksen painopisteenä on yleinen matemaattinen tieto (Kuva 6). Työssä olevat matematiikanopettajat ja opettajankouluttajat sekä ainelaitoksella että pedagogisissa opinnoissa näkevät, että tulevat opettajat oppivat parhaiten yleiseen matemaattiseen tietoon liittyvät asiat.

Pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajat näkevät, että tulevien opettajien osaaminen on melko tasaista näiden kolmen osa-alueen suhteen. Tämä on kuitenkin varsin erisuuntainen näkemys ainelaitoksen opettajankouluttajien ja työssä olevien matematiikanopettajien näkemyksiin verrattuna. Ainelaitoksen opettajankouluttajat näkevät, että tulevien opettajien osaaminen on vahvinta yleiseen matemaattiseen tietoon liittyen ja heikointa matemaattiseen erityistietoon liittyen. Ainelaitoksen opettajankouluttajien näkemykset ovat melko hyvin linjassa työssä olevien opettajien näkemysten kanssa. Työssä olevat matematiikanopettajat arvioivat itse, että heidän

osaamisensa on vahvaa yleisen matemaattisen tiedon osa-alueessa, mutta ei aivan niin hyvällä tasolla kahdessa muussa osa-alueessa.



Kuva 6. Kokonaistulokset matemaattisen sisältötiedon osaamisesta

#### 4.5 Työssä olevien matematiikanopettajien näkemykset ainelaitoksen tarjoamien opintojen hyödyllisyydestä

Työssä olevat matematiikanopettajat arvioivat ainelaitoksen tarjoamien opintojen hyödyllisyyttä opettajantyön kannalta. Luokittelimme vastaajat aineistolähtöisesti heidän suhtautumisensa perusteella. Joka viides (21 %) työssä oleva matematiikanopettaja suhtautui ainelaitoksen opintojen sisältöihin neutraalisti. Puolet heistä arvioi matematiikan opintojen laajuuden olevan sopiva opettajille ja puolet ei perustellut näkemystään. Pieni osa (7 %) työssä olevista opettajista suhtautui sisältöihin negatiivisesti. Useimmissa tapauksissa kriittistä suhteutumista perusteltiin sillä, että yliopistomatematiikan käsittelytapa eroaa niin paljon koulumatematiikasta, että yhteys näiden välillä katoaa. Täysin positiivisia näkemyksiä ei esiintynyt.

Valtaosa opettajista (59 %) esitti kehittämisideoita ainelaitoksen opintojen sisältöihin (taulukko 1). Kehittämisideoista suurin osa (79 %) liittyi matemaattiseen sisältötietoon ja noin joka viides (21 %) liittyi pedagogiseen sisältötietoon.

Taulukko 1. Työssä olevien matematiikanopettajien (N=60) kehittämisideat ainelaitoksen matematiikan opintoihin liittyen. Yksi vastaaja on voinut esittää useamman kuin yhden kehittämisidean.

Kategoria	MKT:n osa-alue	f
Matemaattinen sisältötieto	<i>Yleinen matemaattinen tieto</i>	
	• Yliopisto- ja koulumatematiikan välillä ei ole yhteyttä	12
	• Yliopistomatematiikan sisällöt eivät ole samoja kuin kouluissa	11
	• Geometrian osuutta tulee lisätä	4
	• Talous- ja tilastomatematiikan osuutta tulee lisätä	2
	• Tarvitaan laajempi ymmärrys matematiikan käsitteistä	2
	<i>Eriyinen matemaattinen tieto</i>	
	• Matematiikan opinnot tulee eriyttää, sillä tulevat opettajat ja matemaatikot tarvitsevat erilaista matemaattista tietoa	20
	• Koulumatematiikan osuutta tulee lisätä	12
	<i>Matematiikan rakenteellinen tieto</i>	
• Kokonaisuutena matematiikasta ei muodostu, sillä yliopistomatematiikan sisällöt eivät linkity toisiinsa	4	
• Tarvitaan enemmän tietoa matematiikasta eri kouluasteilla	1	
Pedagoginen sisältötieto	<i>Oppimista koskeva tieto</i>	
	• Tarvitaan tietoa oppimisen vaikeuksista matematiikassa	4
	• Tarvitaan tietoa eritasoisisten oppilaiden oppimisesta	3
	<i>Opettamista koskeva tieto</i>	
	• Tarvitaan tietoa matematiikan didaktiikasta	6
	• Tarvitaan tietoa kuinka eriyttää opetusta lahjakkaiden ja heikkojen oppilaiden välillä	2
	• Tarvitaan osaamista oppilaiden motivoinnista matematiikan opiskeluun	1
	• Tarvitaan tietoa ongelmanratkaisun opettamisesta	1
<i>Opetussuunnitelmia ja –materiaaleja koskeva tieto</i>		
• Tarvitaan tietoa teknologian käyttämisestä matematiikan opettamisessa	1	

*Yleinen matemaattinen tieto.* Työssä olevien matematiikanopettajien mukaan sisällöt yliopistossa ja kouluissa eivät ole samoja. Osa opettajista oli pettyneitä opiskeltuaan suureen määrään matematiikkaa, jolla ei ole mitään tekemistä koulumatematiikan kanssa. He näkivät, että opettajilla tulee olla laajat matemaattiset tiedot, mutta matemaattisia sisältöjä tulisi tarkastella uudestaan opettajan työn kannalta. Työssä olevien matematiikanopettajien mukaan yliopistomatematiikan sisällöt eivät myöskään yhdisty riittävässä määrin koulusisältöihin. Heidän mukaansa sisällöt ovat samoja kuin kouluissa, mutta yliopistomatematiikka on liian korkeatasoista, joten yhteys heidän työhönsä jää epäselväksi. Osa pystyi perustelemaan, että yliopistomatematiikan formaalin käsittelytavan johdosta yhteyttä koulu- ja yliopistomatematiikan välillä on vaikea nähdä. Osa opettajista näki, ettei heillä ole riittävästi osaamista geometriaan, talous- ja tilastomatematiikkaan liittyen. Heidän mielestään näitä asioita joutuu yleensä kertaamaan muita aiheita enemmän ennen opetukseen ryhtymistä. Tästä syystä he esittivät, että kyseisten aihesisältöjen osuutta olisi syytä lisätä ainelaitoksen opintoihin.

*Eriyinen matemaattinen tieto.* Työssä olevien matematiikan opettajien mukaan opettajat tarvitsevat erilaista matemaattista osaamista kuin matemaatikoksi opiskelevat. Valtaosa näki, että matematiikan opintoja tulisi uudistaa kokonaisvaltaisesti opettajan työtä

silmällä pitäen. Työssä olevat opettajat ehdottavat, että matematiikan kurssit tulevien opettajien ja tulevien matematiikoiden välillä tulisi erottaa toisistaan. Heidän mukaansa opinnot painottuvat liiaksi tulevien matemaatikoiden tarpeisiin, sillä kurseilla painopisteenä on usein matemaattisten tulosten todistaminen. Työssä olevien opettajien mukaan todistaminen on vain pieni osa opettajien tarvitsemaa osaamista. Useat opettajat muistelivat myös *Koulumatematiikan* kurssin olleen erityisen hyödyllinen. Heidän mukaansa tällä kurssilla teemat olivat samoja kuin kouluissa, ja asioiden käsittelytapa muistutti koulujen käsittelytapaa. Opettajien mukaan kurssilla käsiteltiin asioita myös opettajantyön kannalta, jonka vuoksi he ovat voineet käyttää oppimaansa kouluopetuksessa. Heidän mukaansa tämän tyyppistä sisältöä tarvitaan enemmän ainelaitoksen opintoihin. Työssä olevien opettajien näkemykset viittaavat vahvasti erityisen matemaattisen tiedon määritelmään: opettaja tarvitsee erilaista matemaattista osaamista matemaatikkoon verrattuna (Ball, et al. 2008).

*Matematiikan rakenteellinen tieto.* Työssä olevat matematiikanopettajat kokivat, että heille ei ole muodostunut riittävän yhtenäistä käsitystä matematiikasta. Heidän mielestään yliopisto-opintojen sisällöt ovat liian pirstaleisia, mistä johtuen he eivät pysty näkemään kuinka saman aiheiset kurssit liittyvät toisiinsa. Työssä olevien matematiikanopettajien mukaan matemaattisen tiedon tulisi olla verkkomainen rakennelma, jossa yhteydet näkyvät selkeästi, mutta yliopisto-opintojen pohjalta heille ei ole muodostu tällaista kokonaiskäsitystä.

*Oppimista koskeva tieto.* Työssä olevat opettajat näkivät, että myös matematiikan oppimista koskevia asioita olisi mahdollista käsitellä ainelaitoksen kurseilla. Heidän mielestään kurssit eivät auttaneet heitä hahmottamaan kuinka matematiikan oppiminen tapahtuu. Heidän mukaansa opettajien tulisi olla tietoisia esimerkiksi matematiikan oppimiseen liittyvistä vaikeuksista. Työssä olevat matematiikanopettajat ovat itse havainneet, että lahjakkaiden ja heikkojen oppilaiden oppimisprosessit ovat melko erilaisia, joten aihealuetta tulisi käsitellä enemmän myös opettajankoulutuksessa.

*Opettamista koskeva tieto.* Työssä olevien opettajien mukaan matematiikan opettamiseen liittyviä asioita voidaan sisällyttää myös ainelaitoksen opintoihin. Matematiikanopettajien mukaan esimerkiksi matematiikan didaktiikkaa olisi mahdollista käsitellä myös ainelaitoksella. Osa opettajista on itse kokenut omat taitonsa eriyttää lahjakkaiden ja heikkojen oppilaiden opetus puutteellisiksi. Heidän mielestään se, että oppilaat oppivat eri tavalla ja eri tahtia on haaste, johon tulisi saada apua opettajankoulutuksesta.

*Opetussuunnitelmia ja -materiaaleja koskeva tieto.* Yksi työssä oleva matematiikanopettaja koki, että tulevat opettajat tarvitsevat nykyistä enemmän opetusteknologian käyttöön liittyvää osaamista. Hänen mukaansa teknologian käyttö lisääntyy koko ajan kouluissa, joten opettajat tarvitsevat monipuolista opetusteknologian osaamista.



#### 4.6 Opettajankouluttajien näkemykset ainelaitoksen tarjoamien opintojen hyödyllisyydestä

Opettajankouluttajat arvioivat opettamisensa kurssien hyödyllisyyttä opettajan työhön kannalta. Luokittelimme vastaajat aineistolähtöisesti kolmeen kategoriaan heidän suhtautumisensa perusteella (Taulukko 2). Joka viides opettajankouluttaja (21 %) suhtautui kurssiensa hyödyllisyyteen positiivisesti. Puolet (50 %) suhtautui hyödyllisyyteen neutraalisti. Osa opettajankouluttajista (14 %) näki ongelmia opettamisensa kurssien sisällöissä ja suhtautui siksi negatiivisesti.

Taulukko 2. Opettajankouluttajien (N=14) näkemyksiä heidän opettamiensa kurssien hyödyllisyydestä opettajantyön kannalta. AL = ainelaitoksen opettajankouluttajat, PH = pedagogisten opintojen ja opetusharjoittelun opettajankouluttajat

Luokka ja perustelu	AL (N=14)
<i>Positiivinen 21% (3)</i>	
• Tulevien opettajien puhtaan matematiikan osaaminen lisääntyy ja käyttämistäni opetusmenetelmistä oppii myös matematiikan opettamista	2
• Opettamani kurssien sisällöt ovat samoja kuin koulujen sisällöt	1
<i>Neutraali 50% (7)</i>	
• Opetussisällöt eivät ole täysin samoja kuin kouluissa, mutta opinnot kehittävät matemaattista ajattelua	2
• Opetussisällöt ovat vain osittain yhteydessä koulujen sisältöihin	2
• Osa opetussisällöistä menee huomattavasti koulujen sisältöjä syvemmälle ja osa sisällöistä on yleissivistystä tuleville opettajille	2
• Kurssini eivät ole pakollisia opettajilla ja siksi sisällöt eivät ole kovin hyödyllisiä opettajille	1
<i>Negatiivinen 14 % (2)</i>	
• Osa kurseistani on yleissivistystä opettajilla ja osalla kurseista minulla ei ole riittävästi aikaa opettaa opettajille tärkeitä asioita	1
• Opettajaopiskelijat oppivat kurssini sisällöt, mutta heillä ei ole riittävästi taitoa soveltaa tätä osaamista kouluopetukseen	1
<i>Tyhjä 14% (2)</i>	2

*Positiivinen (3).* Ainelaitoksen opettajankouluttajista kolme näki opettamansa kurssit hyödyllisinä tulevien opettajien työn kannalta. Heistä kaksi perusteli kantaansa sillä, että opettajat tarvitsevat puhtaan matematiikan osaamista matematiikan opettamisessa. He arvioivat, että heidän käyttämistään opetusmenetelmistä voidaan ottaa myös vaikutteita kouluopetukseen. He myös painottivat visuaalisen esittämisen tärkeyttä, sillä heidän mielestään tulevien opettajien on hyvä nähdä kuinka matematiikkaa voidaan havainnollistaa. Yksi opettajankouluttaja perusteli positiivista suhtautumistaan sillä, että hänen opettamansa sisällöt ovat täysin samoja kuin kouluissa.

*Neutraali (7).* Ainelaitoksen opettajankouluttajista seitsemän suhtautui sisältöjen hyödyllisyyteen neutraalisti. Kaksi opettajaa esitti, että sisällöt eivät ole täysin samoja kuin koulujen sisällöt, mutta opinnot kehittävät tulevien opettajien matemaattista ajattelua. Kaksi opettajankouluttajaa perusteli, että sisällöt ovat vain osittain yhteydessä koulujen sisältöihin. Tästä syystä sisällöt eivät parhaalla mahdollisella tavalla tue opettajankoulutuksen tarpeita. Kaksi opettajankouluttajaa perusteli näkemystään sillä, että osa sisällöistä on

koulumatematiikkaa syvällisempää matematiikkaa ja osa sisällöistä on pikemminkin hyvää yleissivistä opettajille. Heidän mielestään sisällöt eivät ole täysin räätälöity opettajille. Yksi opettaja ei pitänyt sisältöjä kovinkaan hyödyllisinä opettajantyön kannalta. Hän perusteli, että sisältöjen ei tarvitse olla kovin hyödyllisiä, koska kurssit eivät ole pakollisia tuleville opettajille.

*Negatiivinen (2).* Ainelaitoksen opettajankouluttajista kaksi suhtautui opettamiensa kurssien hyödyllisyyteen negatiivisesti. Toinen opettajankouluttaja perusteli, että hänen opettamisensa kurseissa osa sisällöistä on hyödyllisiä opettajille, mutta näillä kurseilla hänellä on kiire opettaa tärkeät asiat. Toisilla kurseilla hänellä ei ole ajankäytöllisiä haasteita, mutta nämä kurssit ovat sisältöjensä puolesta enemmänkin yleissivistystä opettajille. Toinen negatiivisesti suhtautunut opettajankouluttaja perusteli näkemystään sillä, että hänen kokemuksensa mukaan opettajat eivät osaa soveltaa opittua asiaa riittävän hyvin kouluopetukseen. Hänen mukaansa opettajat voisivat antaa yliopistomatematiikkaa vaativia haastavia tehtäviä lahjakkaille oppilaille jo kouluissa. Tehtävien avulla opettajat voisivat keskustella erityisesti lahjakkaiden oppilaiden kanssa koulumatematiikkaa syvällisemmästä matematiikasta. Hänen kokemuksensa perusteella koulujen opettajat eivät kuitenkaan osaa hyödyntää sisältöjä tällä tavoin.

## 5 Pohdinta

### 5.1 Ainelaitoksen toiminnan keskiössä yleisen matemaattisen tiedon opettaminen

Tutkimuksen perusteella työssä olevat matematiikanopettajat kokevat osaavansa matematiikan sisältötiedon kolmesta osa-alueesta parhaiten yleisen matemaattisen tiedon osa-alueen asiat. Samaan arvioon päätyivät myös opettajankouluttajat sekä ainelaitoksella, pedagogisissa opinnoissa että opetusharjoittelussa. Tulos on hyvä, sillä yleisen matemaattisen tiedon hallintaa voidaan pitää perusedellytyksenä matematiikan opettamisessa. Monk (1994) tarkasteli tutkimuksessaan opettajien aineenhallinnan ja oppilaiden osaamisen välistä yhteyttä. Tulosten perusteella opettajien suorittamilla aineopinnoilla on positiivinen vaikutus oppilaiden osaamiseen, mutta yhteys ei kuitenkaan ole lineaarinen. Merkittävin hyöty aineopinnoista saavutettiin jo viiden matematiikan kurssin suorittamisesta, jonka jälkeisillä opinnoilla ei juurikaan ollut vaikutusta oppilaiden oppimiseen. Matematiikan osaaminen on silti perusta koko opettajantiedolle (esim. Rowland, Turner, Thwaites, et al. 2009; O'Meara, 2010).

Ainelaitoksen yleiseen matemaattiseen tietoon keskittyvät opinnot eivät kuitenkaan täysin vastaa työelämän tarpeita. Työssä olevat matematiikanopettajat näkevät, että heillä on muihin aihealueisiin verrattuna heikommat tiedot esimerkiksi tilastomatematiikasta ja geometriasta. Opintosisältöjen painotukset näyttävät kaipaavan päivittämistä, sillä myös useat opettajankouluttajat uskovat, että heidän opettamansa kurssit ei parhaalla tavalla tue opettajankoulutuksen tehtävää. Monet ainelaitoksen opettajankouluttajat kertoivat, että

opetetut sisällöt eivät kohtaa täysin koulusisältöjen kanssa eikä niitä siksi voi pitää ehdottoman hyödyllisinä tuleville opettajille.

Työssä olevilla matematiikanopettajilla on haaste nähdä kuinka koulu- ja yliopistomatematiikka ovat yhteydessä toisiinsa. Monet matematiikanopettajat näkivät koulu- ja yliopistomatematiikan irrallisina kokonaisuuksia, joiden välillä ei ole riittävää yhteyttä. Eräs esiin noussut näkemys oli, että yliopistoille tyypillinen matematiikan formaali käsittely saattaa heikentää tarvittavan yhteyden muodostumista. Toisaalta sama näkemys nousi esiin myös opettajankouluttajien puolelta, sillä osa opettajankouluttajista kuvaili sisältöjen olevan huomattavasti koulumatematiikkaa syvällisempää.

On toivottavaa, että opettajaksi valmistuneet pystyisivät näkemään entistä selkeämmin yliopistossa opiskellun matematiikan hyödyllisyyden opettajan työssään. Tietenkään peruskoulussa tai lukiossa ja yliopistossa opettavat matematiikan sisällöt eivät voi olla samoja. Yliopisto-opetus antaa huomattavasti laajemmat ja syvällisemmät tiedot matematiikasta kuin aiemmat kouluasteet. Samoin on keskeistä, että matemaattisen ajattelun valmiuksia ja myös formaalia matematiikan esittämistapaa harjoitellaan yliopiston matematiikan kursseilla. Yliopistokoulutusta voidaan kuitenkin kehittää sillä tavoin, että yliopistomatematiikan opinnoissa yhteys koulussa käsiteltävään matematiikkaan nostetaan esiin aina kun siihen on mahdollisuus. Samoin on tärkeää varmistaa, että opintojen päätteeksi koulussa tarvittava matematiikka osataan kaikkien aihealueiden osalta syvällisesti.

## 5.2 Opettajat tarvitsevat myös erityistä matemaattista tietoa

Tutkimuksen perusteella työssä olevat matematiikanopettajat kokevat tarvitsevansa erilaista matemaattista tietoa kuin matemaatikoiksi opiskelevat. Heidän mukaansa tulevien opettajien ja matematiikoiden opetusohjelmat tulisi eriyttää matematiikan opintojen osalta. Työssä olevat matematiikanopettajat näkevät, että näin matematiikkaa olisi mahdollista käsitellä erityisesti opettajantyön kannalta. Tämä on keskeinen ero myös Shulmanin ja Ballin opettajantiedon malleissa (vrt. Shulman 1986; Ball, et al. 2008). Ballin ryhmän tutkimukset osoittavat, että Shulmanin mallissa esitetty aineenhallinta voidaan jakaa yksityiskohtaisempiin osiin, sillä matematiikanopettajat tarvitsevat yleisen matemaattisen tiedon lisäksi sellaista matemaattista tietoa, joka on erityistä matematiikan opettamisen kannalta.

Työssä olevat matematiikanopettajat näkevät, että tulevat opettajat tarvitsevat nykyistä enemmän myös koulumatematiikkaan liittyvää laajempaa tietämystä. Koulumatematiikan kurssilla on pitkä historia opettajankoulutusohjelmassa, ja se on saanut aiemminkin erityisen hyvää palautetta opettajilta (Sorvali, 2004). Tulosten perusteella näyttäisi siltä, että koulumatematiikkaan (O'Meara, 2010) tai erityiseen matemaattiseen tietoon (Ball, et al. 2008) liittyvien aiheiden osuutta tulisi lisätä opettajankoulutusohjelmassa.

### 5.3 Tutkimustulokset pohjana ainelaitoksen uudistuksissa

*Design-Based Research* tutkimusstrategian mukaisesti tutkimustuloksia käytettiin kehittämissuunnitelman laatimiseen ja toteuttamiseen. Kehittämissuunnitelman laadinta aloitettiin jo aineiston analysointivaiheessa keväällä 2013. Ensimmäiset uudistukset otettiin käyttöön ainelaitoksella seuraavana lukuvuotena 2013-2014. Myös täysin uusia kursseja lisättiin opettajankoulutusohjelmaan. Näistä kaikille tuleville opettajille pakollisiksi asetettiin *tilastomatematiikan*, *geometriian* ja *koulumatematiikan* kurssit. Tilastomatematiikan ja geometriian kurssien suunnittelussa pyrittiin huomioimaan entistä tarkemmin koulujen nykyiset sisällöt. *Koulumatematiikan* kurssilla tavoitteena on käsitellä monipuolisesti koulumatematiikan aiheita erityisesti opettajantyön näkökulmasta. Käsiteltävät aihealueet liittyvät yleiseen matemaattiseen tietoon, mutta käsittelytavan johdosta kurssin painopiste on enimmäkseen matemaattisessa erityistiedossa.

Ainelaitoksen opetustarjonnassa on aiemmin ollut opettajille tarjolla matematiikan historiaan ja teknologiaan liittyviä erityiskursseja. Näiden lisäksi nykyisin tarjolla on matemaattisen ajattelun erityispiirteisiin ja opetuksen analysointiin keskittävät kurssit. Uudistustyössä vanhoja kursseja kehitettiin tutkimustulosten pohjalta. Seuraavassa esitellään lyhyesti ainelaitoksen opettajille suunnattuja erityiskursseja.

*Matemaattisen ajattelun erityispiirteitä* käsittelevällä kurssilla keskeisenä sisältönä ovat NCTM-standardeissakin mainitut matematiikan oppimisen prosessitavoitteet, joita ovat 1) ongelmanratkaisu, 2) päättely, perustelu ja todistaminen, 3) matemaattinen viestintä, 4) esitysmuodot ja 5) yhteydet (Bossé, Lee, Swinson & Faulconer, 2010). Kurssilla pohditaan eri matematiikan osa-alueisiin liittyvien esimerkkien ja tutkimuskirjallisuuden avulla näihin tavoitteisiin liittyviä piirteitä ja merkitystä matemaattisessa ajattelussa. MKT-mallin näkökulmasta kurssin sisällöt liittyvät enimmäkseen matematiikan oppimista koskevaan tietoon.

*Matematiikan opetusteknologiaa* käsittelevällä kurssilla tutustutaan matematiikan opetuksen ja oppimisen avuksi suunniteltuihin tietokoneohjelmistoihin. Tärkeimpiä ohjelmistoja ovat GeoGebra ja symbolisten laskinten ohjelmistot (sekä kämmenlaitteissa että tietokoneilla olevat ohjelmistot). Kurssilla harjoitellaan ohjelmistojen käyttöä, tutustutaan niiden teknisiin ominaisuuksiin sekä pohditaan dynaamisen havainnollistuksen ja symbolisen laskennan merkitystä pedagogiselta kannalta. Kurssin sisällöt käsittelevät enimmäkseen opetusteknologiaa eli MKT-mallin näkökulmasta opetussuunnitelmia ja –materiaaleja koskevaa tietoa.

*Matematiikan historian* kurssilla käsitellään matematiikan kehityksen tärkeimpiä vaiheita ja keksintöjä. Samalla pohditaan myös matematiikan luonnetta ja sen muotoutumista ajan saatossa. Tärkeitä teemoja ovat mm. trigonometriian, logaritmien, analyyttisen geometriian sekä differentiaali- ja integraalilaskennan kehitys. MKT-mallin näkökulmasta kurssin painopiste on matemaattisessa erityistiedossa.

*Matematiikan opetuksen analysointitaidot* kurssin aikana opettajaopiskelija analysoi erilaisia matematiikan opetustilanteita sekä rakentaa ja kehittää omaa opetuksen

analysointimalliaan. Kurssilla keskustellaan myös opettajantiedosta eli pohditaan kysymystä millaista tietoa matematiikan opettamiseen tarvitaan. Kurssilla tarkoituksena on muodostaa opettajaopiskelijoille yhtenäisempi käsitys opettajantiedosta ja siten vahvistaa kaikkia MKT-mallin osa-alueita.

#### 5.4 Teoreettinen malli opettajankoulutuksen kehittämisen tukena

Arviointipohjaisen kehittämisen merkittävänä vahvuutena on se, että arviointitiedon avulla kehittäminen voidaan kohdistaa yksilöllisesti koulutuksen ongelmakohtiin. Projektiluontoisilla hankkeilla ei saavuteta useinkaan pysyviä tuloksia, vaan tilalle tarvitaan pitkäjänteistä kehitystyötä. Kehittämisen avuksi tarvitaan myös uusia kestäviä opettajankoulutuksen arviointimenetelmiä, joilla koulutusta voidaan arvioida ja viedä jatkuvasti eteenpäin. Systemaattisen ja pitkäjänteisen kehitystyön tukena olisi syytä käyttää jotakin teoreettista mallia. MKT-malli näyttäisi sopivan suomalaisen matematiikan opettajankoulutuksen kontekstiin hyvin, sillä usein matematiikan opetussisällöt koostuvat puhtaasta matematiikasta (*yleinen matemaattinen tieto*), opettajille suunnatuista matematiikan erityiskursseista (*matemaattinen erityistieto*) ja vastaavasti pedagogisissa opinnoissa käsiteltävistä yleisistä ja matematiikkaspesifeistä opettamisen (*opettamista koskeva tieto*) ja oppimisen asioista (*oppimista koskeva tieto*). Usein myös opetussuunnitelmaa (*opetussuunnitelmia ja –materiaaleja koskeva tieto*) ja matematiikan rakennetta (*matematiikan rakenteellinen tieto*) tarkastellaan koulutuksen eri vaiheissa.

Käytimme mallin osa-alueita teoreettisena taustana sekä tutkimuksen määrällisessä että laadullisessa osuudessa. Osa-alueiden avulla pystyimme tarkastelemaan opettajankoulutusta analyttisesti ja systemaattisesti tunnistaaksemme koulutuksen heikot ja vahvat osa-alueet. Aineistotriangulaatio lisää tutkimuksen luotettavuutta, sillä laadulliseen ja määrälliseen aineistoon perustuvat tulokset ovat hyvin samansuuntaisia. Esimerkiksi kyselyssä esitettyjen väittämien perusteella matemaattinen erityistieto jää heikoimmalle ja vastaavasti avoimissa kysymyksissä esille nousi se, että opettajat tarvitsevat puhtaan matematiikan lisäksi myös erilaista matemaattista tietoa.

MKT-mallin soveltamista matematiikan opettajankoulutuksen arviointiin ja kehittämiseen on syytä jatkaa. Mallin avulla opettajankoulutuksen painopisteitä on mahdollista tarkastella ja tarvittaessa muuttaa. Yksittäisten kurssien lanseerauksella saattaa olla merkitystä maisterikoulutuksen kokonaisuudessa, mutta lisäksi tarvitaan myös opintokokonaisuuksien kehitystyötä. Tähän prosessiin tarvitaan kaikkien opettajankouluttajien panos ainelaitoksella, pedagogisissa opinnoissa ja myös opetusharjoittelussa. Tulevaisuudessa opettajankoulutuksen kolmikannan yhteistyötä täytyy vielä entisestään tiivistää. Kaikki opettajankouluttajat puhaltavat samaan hiileen, mutta tilannetta on syytä pohtia myös teoreettisesta näkökulmasta. Näin jokainen toimija ymmärtää, että mistä suunnasta kunkin toimijan vaikuttaminen tapahtuu osana kokonaisuutta.

Opettajankoulutus antaa valmiudet opettajan työhön ja opettajan työssä tapahtuvaan ammatilliseen ja tieteelliseen kehittymiseen. Tieteellisen aspektin haluamme nostaa tässä aiempaa painokkaammin esiin ammatillisen rinnalla. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että tieteelliseen tutkimukseen perustuva opettajankoulutus antaa valmistuville opettajille valmiudet kehittää omaa ammatillista osaamistaan tieteellisessä viitekehyksessä tutkimustietoa yhteisöllisesti hyödyntäen ja tuottaen.

## Kiitokset

Haluamme esittää suuret kiitokset *Pohjois-Karjalan kulttuurirahastolle*, joka on myöntänyt useita apurahoja matematiikan opettajankoulutuksen arviointipohjaista kehittämistä käsittelevän väitöskirjatyön tekemiseen.

## Kirjallisuus

- Adler, J. & Jaworski, B. (2009). Public writing in the field of mathematics teacher education. In R. Even & D. L. Ball (Eds.) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. The 15<sup>th</sup> ICMI Study. 249-254.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany, March 1 – 4, 2009.
- Ball, D. L., Hill, H.C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14–17, 20–22, 43–46.
- Ball, D., Thames, M.A. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bossé, M. J., Lee, T. D., Swinson, M., & Faulconer, J. (2010). The NCTM process standards and the five Es of science: Connecting math and science. *School science and mathematics*, 110(5), 262-276.
- Creswell, J. W., & Clark, V. L. P. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Sage Publications, Inc. California.
- Creswell, J. W., & Clark, V. L. P. (2011). *Designing and conducting mixed methods research*. 2<sup>nd</sup> edition. Sage Publications, Inc. California.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: what we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 105-121.
- Hickey, G., & Kipping, C. (1996). Issues in research. A multi-stage approach to the coding of data from open-ended questions. *Nurse Researcher*, 4, 81-91.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for research in mathematics education*, 35(5), 330-351.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, 42(2), 371-406.
- Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, 15(9), 1277-1288.

- Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of mixed methods research*, 1(2), 112-133.
- Kupari, P., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). *Oppijälhtöistä pedagogiikkaa etsimään. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen: kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa*. Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopistopaino.
- Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettenranta, J. (2013). *PISA12 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja, 2013:20.
- Metsämuuronen, J. (2013). Matemaattisen osaamisen muutos perusopetuksen luokilla 3-9. Teoksessa Metsämuuronen, J. (toim.). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005– 2012*. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4.
- Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, 23(1), 47-60.
- O'Meara, N. (2010). *Improving mathematics teaching at second level through the design of a model of teacher knowledge and an intervention aimed at developing teachers' knowledge*. University of Limerick. Dissertation.
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2012). Suomalaisen oppilaiden kouluosaaminen on kansainvälistä kärkeä.  
[http://www.minedu.fi/OPM/Verkkouutiset/2012/12/pirls\\_timss.html?lang=fi&extra\\_locale=fi](http://www.minedu.fi/OPM/Verkkouutiset/2012/12/pirls_timss.html?lang=fi&extra_locale=fi) WWW-sivu. Luettu 17.6.2015
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2013). Pisa 2012: Suomalaisnuorten osaaminen laskussa.  
<http://www.minedu.fi/OPM/Tiedotteet/2013/12/pisa.html> WWW-sivu. Luettu 17.6.2015
- Opetushallitus (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Määräys 33/011/2003. Vammalan Kirjapaino Oy.
- Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). Springer Netherlands.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. and Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.
- Räsänen, P. & Närhi, V. (2013). Heikkojen oppijoiden koulupolku. Teoksessa Metsämuuronen, J. (edt.). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005– 2012*. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4.
- Saaranen-Kauppinen, A., & Puusniekka, A. (2006). KvaliMOTV - Triangulaatio.  
[http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2\\_3\\_2\\_4.html](http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2_3_2_4.html) WWW-sivu. Luettu 8.9.2015
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sorvali, T. (2004). Miten matematiikka taipuu opettajankoulutuksen tarpeisiin. Teoksessa J. Enkenberg, E. Savolainen & P. Väisänen (toim.) *Tutkiva opettajankoulutus-Taitava opettaja*. Savonlinnan opettajakoulutuslaitos, 108-117.
- Stein, M. K., Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639-663.
- Tashakkori, A., & Creswell, J. W. (2007). Editorial: The new era of mixed methods. *Journal of mixed methods research*, 1(1), 3-7.
- Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools*. Bristol, PA: Falmer.
- The Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 5-8.
- Tuohilampi, L & Hannula, M. (2013). Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. Ja 9. Luokalla. Teoksessa Metsämuuronen, J. (edt.). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005– 2012*. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4.