Funktiokäsityksestä espoolaisessa Middle Years Programme -yläkoulussa

Jessica F. A. Salminen
Helsingin yliopisto

Tiivistelmä Espoolainen Middle Years Programme -yläkoulu noudattaa opetuksessaan kansallista opetussuunnitelmaa, mutta lähestymistapa opetukseen on Middle Years Programme:n mukainen, ja opetuskieli on englanti. Oppimateriaalia, joka täyttää nämä kriteerit, ei kuitenkaan ole saatavilla funktioiden opetukseen. Tästä syystä heille räätälöitiin varta vasten oma oppimateriaali. Oppimateriaalin luominen johdatti tutkijan pohtimaan, miten oppilaat olivat lopulta käsittäneet funktion, ja miten funktio-käsitettä kannattaisi jatkossa lähestyä opetuksessa. Aineisto kerättiin keväällä 2012. Tutkimukseen osallistui yhden koulun 63 yhdeksäsluokkalaisesta 49. Inspiraation lähteenä tälle tutkimukselle toimi Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimus funktiokäsityksestä. Yläkoululaisten funktiokäsityksen vertailukohteena käytettiin samana keväänä kerättyä lukiolaisaineistoa. Tutkimusaineiston analysoinnissa käytettiin sekä laadullisia että määrällisiä menetelmiä.

1 Johdanto

Englannin kielistä oppimateriaalia, joka on Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukainen, ei ole saatavilla funktioiden opetukseen. Oppimateriaalin luominen johdatti tutkijan pohtimaan, miten oppilaat olivat lopulta käsittäneet funktion, ja miten funktio-käsitettä kannattaisi jatkossa lähestyä opetuksessa.

Tutkimus toteutettiin Middle Years Programme –yläkoulussa. Middle Years Programme on IB-organisaation (International Baccalaureate) kehittämä opetuksen lähestymistapa. Varsinaisiin oppisisältöihin ohjelma ei ota kantaa. Ohjelman kohderyhmään kuuluvat 11-16 –vuotiaat oppilaat, mutta Suomessa ohjelma on usein tiivistetty kattamaan vain yläkoululuokat. Ohjelman tarkoitus on yhtenäistää maata ja koulua usein vaihtamaan joutuvien oppilaiden oppimista ja kasvamista toisista ja ympäristöstä välittäviksi ainerajat ylittäviksi tutkiviksi oppijoiksi. Tästä syystä Middle Years Programme –kouluja löytyy lähes jokaisesta maasta, ja usein opetuskieli niissä on englanti. (IBO, 2013.)

Uudet opetussuunnitelman perusteet astuvat voimaan 2016. Opetushallitus on julkaissut dokumentin Opetussuunnitelman perusteluonnokset, syksy 2012 (OPSL, 2012) antamaan esimakua uusista opetussuunnitelman perusteista. Opetussuunnitelman perusteisiin tulevien muutosten myötä opetus suomalaisissa kouluissa tulee muuttumaan enemmän Middle Years Programme:n mukaisen opetuksen kaltaiseksi (OPSL, 2012; IBO, 2012).

Funktiota on perinteisesti pidetty yhtenä hankalimmista opetettavista matematiikan käsitteistä. Suomessa funktioon käsitteenä tutustutaan ensimmäisen kerran viimeistään peruskoulun viimeisillä luokilla (POPS, 2004). Tämän jälkeen se kohdataan uudestaan lukiossa (LOPS, 2003). Monet saattavat kuitenkin ymmärtää funktion käsitteenä vasta matematiikan yliopisto-opinnoissa, jos silloinkaan (Vinner & Dreyfus, 1989).

Tutkimukseen osallistuneet yhdeksäsluokkalaiset opiskelivat englanniksi funktioista perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS, 2004) mainitut sisällöt, mutta oppiainesisältöä lähestyttiin Middle Years Programme:n mukaisesti. Oppimateriaali oli heille varta vasten räätälöity. Funktiokäsitystuloksia vertailtiin Hannulan ja Tuomen (2012) lukiosta keräämän aineiston kanssa. Kyseinen helsinkiläinen lukio opettaa vain suomalaisen opetussuunnitelman mukaisesti opetuskielenään suomi. Tutkimustehtävää lähestyttiin seuraavilla tutkimuskysymyksillä:

1. Miten MYP:n Espoossa läpikäynneet yhdeksäsluokkalaiset määrittelevät funktion verrattuna Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaisiin?
2. Miten MYP:n Espoossa läpikäyneet yhdeksäsluokkalaiset ymmärtävät funktion käsitteen vertailukohteenaan Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaiset?
3. Mitä yhteyksiä on havaittavissa funktiokäsityksen ja yläkoulun päättöarvosanan välillä MYP:n Espoossa läpikäynneillä yhdeksäsluokkalaisilla?

2 Funktiokäsitys

Monet ymmärtävät funktion käsitteenä vasta matematiikan yliopisto-opinnoissa, jos silloinkaan (Vinner & Dreyfus, 1989). Suomessa funktio esitellään ensimmäisen kerran yleensä yläkoulun viimeisillä luokilla (POPS, 2004). Valtaosa oppilaista ei vielä tässä vaiheessa kykene käsittämään funktion varsinaista määritelmää sen sisältämän vieraan terminologian vuoksi. Termistön helpottamisessa piilee kuitenkin omat vaaransa: kun korkean tason käsite käännetään helpommalle kielelle, se voi johtaa tarkkuuden menettämiseen ja käsitteelliseen vaikeuteen. Arkikieliset käännökset saattavat sisältää myös tahattomia sävyjä, jotka puolestaan voivat johtaa väärinkäsityksiin. (Schwarzenberger & Tall, 1978.) Esimerkiksi funktiosta yksinomaan puhuminen jokaisessa pisteessä samoin toimivana koneena voi johtaa hämmennykseen paloittain määriteltyjen funktioiden ja jossakin pisteessä määrittelemättömien funktioiden kohdalla.

Vaikka oppilas tietäisi määritelmän matemaattiselle käsitteelle, hän ei välttämättä käytä tätä määritelmää hyväkseen päättäessään, onko jokin matemaattinen esitys esimerkki kyseisestä matemaattisesta käsitteestä vai ei. Sen sijaan oppilas päättää tämän käsitteestä muodostamansa mielikuvan (concept image) perusteella. (Vinner & Dreyfus, 1989.) Tällä käsitteeseen liittyvällä mielikuvalla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa Vinnerin ja Dreyfusin (1989) ja Tallin ja Vinnerin (1981) terminologian mukaisesti koko sitä kognitiivista struktuuria, joka assosioituu käsitteeseen. Tämä struktuuri pitää sisällään kaikki mentaaliset kuvat (mental pictures), ominaisuudet ja prosessit, jotka liittyvät käsitteeseen. Mentaalisilla kuvilla taas tarkoitetaan mitä tahansa representaatiota kuten kuvaa, symbolista kaavaa, taulukkoa tai kuvaajaa (Vinner & Dreyfus, 1989). Kognitiivinen struktuuri rakentuu vuosien varrella erilaisten kokemusten kautta. Se muuttuu ja kehittyy kohdatessaan uusia virikkeitä (stimuli). (Tall & Vinner, 1981.)

Opettaja voi antaa oppilaalle yleisen määritelmän funktiosta ja työskennellä yleisen notaation parissa hetken ennen kuin hän viettää pitkiä aikoja käyttäen esimerkeissään vain kaavoja. Tällaisessa tapauksessa käsitteeseen liittyvä mielikuva voi kehittyä rajoitetumpaan notaatioon, jossa on vain kaavoja. Oppilas on voitu jopa opettaa vastaamaan yleisellä määritelmällä, vaikka hänen käsitteeseen liittyvä mielikuvansa on puutteellinen tai jopa väärä. Tällainen oppilas voi pärjätä hyvin niin kauan kuin funktiota käsitellään vain tutussa asiayhteydessä. Myöhemmin, kun hän kohtaa funktion sen laajemmassa merkityksessä, hän ei välttämättä enää pärjää. (Tall & Vinner 1981.) Vaikka määritelmät esitelläänkin oppilaille, oppilaat eivät silti välttämättä käytä määritelmää apunaan päättäessään, onko jokin funktio vai ei. Useimmissa tapauksissa oppilas tekee valintansa käsitteeseen liittyvän mielikuvan (concept image) avulla. (Vinner & Dreyfus 1989.)

Funktiolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia käsitteenmuodostuksen kannalta. Näitä ominaisuuksia ovat esimerkiksi funktion arvojen yksikäsitteisyys, epäjatkuvuus, lähtöjoukon mahdollinen epäyhtenäisyys ja poikkeuskohdat (Vinner & Dreyfus, 1989). Kaikkia tällaisia funktion käsitteeseen liittyviä tietoja voidaan tarkastella suhteessa eri representaatioihin.

Käsite representaatio puolestaan on epämääräinen, ja sen määritelmä riippuu tutkimuksesta (Gagatsin & Elia, 2007). Pohjimmiltaan representaatiot ovat kuitenkin tiedon eri esitystapoja (Janvier, 1987). Tässä tutkimuksessa käytetään Gagatsiksen ja Elian artikkelin (2007) tapaan representaatiota sen rajatummassa merkityksessä: representaatiot ovat työkaluja, joita käytetään matemaattisten ideoiden esittämisessä. Heidän mukaansa funktio voidaan ilmaista kolmen eri representaation kautta, jotka ovat: 1) graafinen, 2) verbaalinen ja 3) symbolinen.

Kun oppija ymmärtää käsitteen, hän osaa myös tulkita sitä eri representaatioiden kautta ja siirtyä representaatiosta toiseen. Oppimiseen liittyvä kysymys tässä yhteydessä on se, miten tietoja funktion ominaisuuksista osataan ja ymmärretään eri esitystapojen kautta. Gagatsiksen ja Elian (2007, 91) artikkelissa toisena esitellyssä tutkimuksessa 16-vuotiaille opiskelijoille tuotti vaikeuksia funktion kunnollisen määritelmän tuottaminen ja funktion eri representaatioiden tunnistaminen. Funktion kuvaajia tunnistettiin taas selkeästi paremmin kuin symbolisia funktion esitystapoja.

Gagatsiksen ja Elian mukaan (2007) funktion ymmärtämistä voidaan analysoida ja kuvailla vähintään kolmella eri tavalla:

1. Oppilaiden antamien määritelmien kautta
2. Oppilaiden kyvyt käsitellä funktion erilaisia representaatioita
3. Ongelmanratkaisutehtävien kautta, joissa funktio täytyy esittää eri representaatiotavoilla. (Gagatsis & Elia 2007.)

Nämä kolme tapaa tuovat jokainen oman ainutlaatuisen panoksensa oppilaan käsitykseen funktiosta.

Vinner ja Dreyfus (1989) jaottelivat oppilaiden antamia funktion määritelmiä taulukossa 1 esitellyllä tavalla.

Taulukko 1 Funktion määritelmien luokittelu Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksessa

Luokka	Kuvaus	Esimerkki Vinner ja Dreyfus (1989) aineistosta
1) Vastaavuus (correspondence)	Minkä tahansa kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus, jossa kutakin ensimmäisen joukon jäsentä vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.	"A correspondence between two sets of elements." "For every element in A there is one and only one element in B."
2) Riippuvuusrelaatio (dependence relation)	Kahden muuttujan välinen riippuvuus.	"One factor depending on the other one." "A dependence between two variables." "A connection between two magnitudes."
3) Sääntö (rule)	Jokin riippuvuus, jossa on havaittavissa säännönmukaisuutta.	"Something that connects the value of *x* with the value of *y*." "The result of a certain rule applied to a varying number." "A relation between *x* and *y* is a function."
4) Operaatio (operation)	Muuttujan arvoa operoidaan, jolloin saadaan funktion arvo.	"An operation." "An operation done on certain values of *x* that assigns to every value of *x* a value of $y = f(x)$." "Transmitting values to other values according to certain conditions."
5) Kaava (formula)	Algebrallinen esitys, yhtälö tai kaava.	"It is an equation expressing a certain relation between two objects." "A mathematical expression that gives a connection between two factors." "An equation connecting two factors."
6) Representaatio (representation)	Funktio määritellään sen yhdellä symbolisella tai graafisella esityksellä, joka voi olla vailla merkitystä.	"A graph that can be described mathematically." "A collection of numbers in a certain order which can be expressed in a graph." "$y = f(x)$." "$y(F) = x$."

Suurin osa edellä mainituista tavoista ovat puutteellisia tapoja määritellä funktio käsitteenä. Ainoastaan näistä ensimmäinen vastaa funktion matemaattista määritelmää (Vinner & Dreyfus, 1989). Yksilön mielikuvaan funktion käsitteestä voi sisältyä yksi tai useampi näistä käsityksistä (Tall & Vinner, 1981).

3 Tutkimuksen toteutus

3.1 Aineiston koonti

Tutkimus toteutettiin suomalaisessa Middle Years Programme –yläkoulussa jokaisella (kolmella) yhdeksännellä rinnakkaisluokalla samanaikaisesti kevätlukukauden viimeisenä päivänä. Kaikki yhdeksäsluokkalaiset, jotka olivat paikalla tuona päivänä, osallistuivat tutkimukseen (n=49). Funktioita käsittelevästä kurssikokeesta oli tällöin jokaisella luokalla aikaa noin kaksi kuukautta. Vastausprosentiksi saatiin 77,8 %. Aikaa paperisen kyselylomakkeen täyttämiseen annettiin tunti. Oppilaiden ei annettu keskustella keskenään kysymyksistä, eikä vinkkejä mahdollisista oikeista vastauksista annettu.

3.2 Kyselylomakkeen laadinta

Tutkimuksessa käytetty kyselylomake pohjautuu Vinnerin ja Dreyfusin (1989) kyselylomakkeeseen, jossa pyydettiin antamaan määritelmä funktiolle, ja päättämään, mitkä annetuista funktion eri representaatioihin liittyvistä tehtävistä esittävät funktiota. Kyselylomake otti huomioon myös Gagatsiksen ja Elian (2007) mainitsemat kolme tapaa analysoida ja kuvailla funktion ymmärtämistä. Kyselylomake on pääpiirteissään sama kuin lukiossa käytetty kyselylomake. Kohderyhmän erilaisuuden vuoksi kolmannen asteen funktio lukiolaisten kyselylomakkeesta muutettiin yhden symbolisen representaation ymmärtämistä mittaavan tehtävän kohdalla toisen asteen funktioksi.

Kyselylomaketta testattiin ennen varsinaista koetta viidellä eri aineenopettajalla. He tarkistivat, että kysymykset ovat kummallakin kielellä yhteneviä. Testiryhmän palautteen perusteella kyselylomaketta selkeytettiin lisäämällä siihen kyllä – ei –vastausruudut. Samalla korjattiin myös mukaan eksyneet kirjoitusvirheet ja kielioppi. Kyselylomake löytyy liitteestä 1.

3.3 Aineiston analysointimenetelmät

Funktion määritelmien luokittelussa käytettiin kvantifiointiin pyrkivää sisällön analyysiä (Seitamaa-Hakkarainen, 2000). Aineisto analysoitiin ja jaoteltiin samoihin luokkiin, joita oli käytetty Vinnerin ja Dreyfusin (1989) sekä Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksissa. Luokat olivat toisensa poissulkevia.

Myös osion yksi tehtävien 2, 3 ja 4 kohdalla käytettiin virhekäsitysten analysoinnissa kvantifiointiin pyrkivää sisällön analyysiä (Seitamaa-Hakkarainen, 2000). Rasti ruutuun -kohdissa jokaisesta oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen ja väärästä tai puuttuvasta vastauksesta nolla pistettä. Yläkoulun oppilaiden ja lukion oppilaiden vastausten oletettiin noudattavan normaalijakaumaa. Näin ollen näitä vastauksia voitiin vertailla keskenään riippumattomien ryhmien studentin t-testillä (Nummenmaa, 2007). Kussakin tapauksessa oli $p>0.1$. Ryhmien välillä ei siis ollut havaittavissa tilastollisesti merkitsevää eroa.

4 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

4.1 Miten MYP:n Espoossa läpikäyneet yhdeksäsluokkalaiset määrittelevät funktion verrattuna Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaisiin?

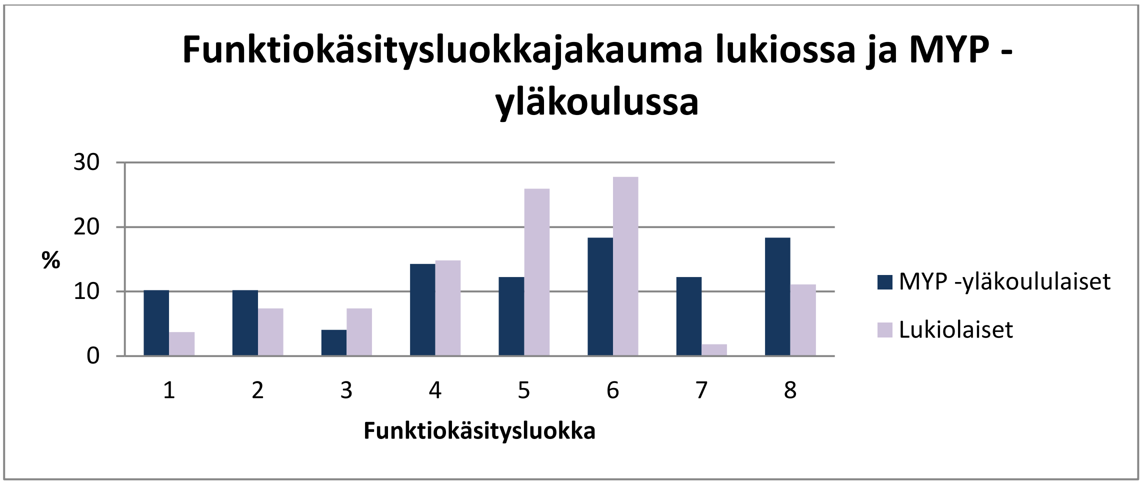
Funktiokäsitysten luokitteluun käytettiin Vinnerin ja Dreyfusin (1989) jaottelua lisäten siihen Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen kanssa yhtenevät luokat ”Muu” ja ”Ei vastausta”. ”Ei vastausta” -luokkaan luokiteltiin tässä tutkimuksessa myös ”En tiedä” -vastaukset. Funktiokäsitykset luokiteltiin käyttäen kvantifiointiin pyrkivää sisällön analyysiä Vinnerin ja Dreyfusin (1989) jaottelun pohjalta taulukossa 2 esitetyllä tavalla.

Kuten Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksessa, myös tässä tutkimuksessa määritelmät luokiteltiin siten, että jokainen vastaus sijoittui täsmälleen yhteen luokkaan.

Kuviossa 1 on esitelty oppilaiden antamien funktion määritelmien jakauma tutkimuksen kohteena olleessa yläkoulussa ja samana keväänä toteutetun Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen kohteena olleessa lukiossa. Siinä, missä lukiolaiset määrittelivät funktion selvästi eniten kaavan tai sen yhden representaation kautta, yläkoululaisten funktion määrittelytavat jakautuivat huomattavasti tasaisemmin eri luokkiin. Yleisimmin funktio määriteltiin kuitenkin myös yläkoulussa funktion jonkin representaation kautta. Yllättäen funktio määriteltiin kuitenkin oikein eli vastaavuuden kautta selvästi useammin yläkoulussa kuin lukiossa.

Taulukko 2 Funktion määritelmien jaottelu.

Luokka	Kuvaus	Esimerkki aineistosta
1) Vastaavuus (correspondence)	Minkä tahansa kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus, jossa kutakin ensimmäisen joukon jäsentä vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.	”It’s a slaughter house, you put the input in and get a output out. For every input there is a unique output. (Slaughterhouse is the function.)” “For every x-coordinate there is a corresponding y-coordinate.”
2) Riippuvuusrelaatio (dependence relation)	Kahden muuttujan välinen riippuvuus.	“Something that contains an input and output.” “It is a relationship between the inputs and the outputs. The line curves.”
3) Sääntö (rule)	Jokin riippuvuus, jossa on havaittavissa säännönmukaisuutta.	”A rule” “A equation with a x and a y axis. The x and the y are always corresponding.”
4) Operaatio (operation)	Muuttujan arvoa operoidaan, jolloin saadaan funktion arvo.	”A calculation that transforms one set of numbers to another“ “A middleman that processes values before handing them over.”
5) Kaava (formula)	Algebrallinen esitys, yhtälö tai kaava.	”A function is a formula that has an input and output.” “A function is a equation showing values.”
6) Representaatio (representation)	Funktio määritellään sen yhdellä symbolisella tai graafisella esityksellä, joka voi olla vailla merkitystä.	“A function is the equation of drawing a line.” “A function is a type of an equation which illustrates a curved line on a graph.”
7) Muu	Edellisiin luokkiin sopimaton määritelmä.	”A number which has a precise number given.” “Functions have inputs, outputs and a domain“
8) Ei vastausta. / En tiedä.		

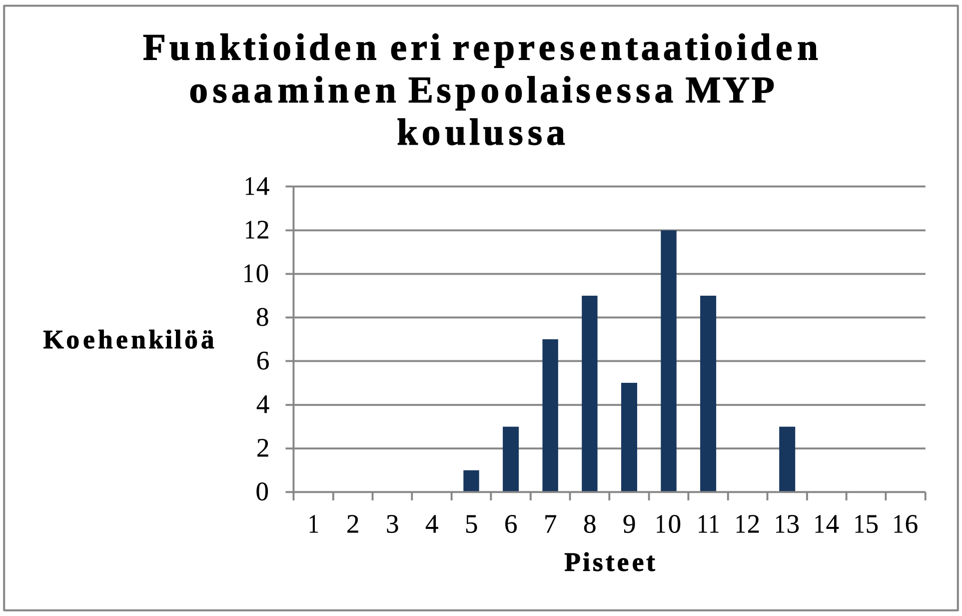


Kuvio 1 Funktiokäsitysluokkajakauma

4.2 Miten MYP:n Espoossa läpikäyneet yhdeksäsluokkalaiset ymmärtävät function käsitteen vertailukohteenaan Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaiset?

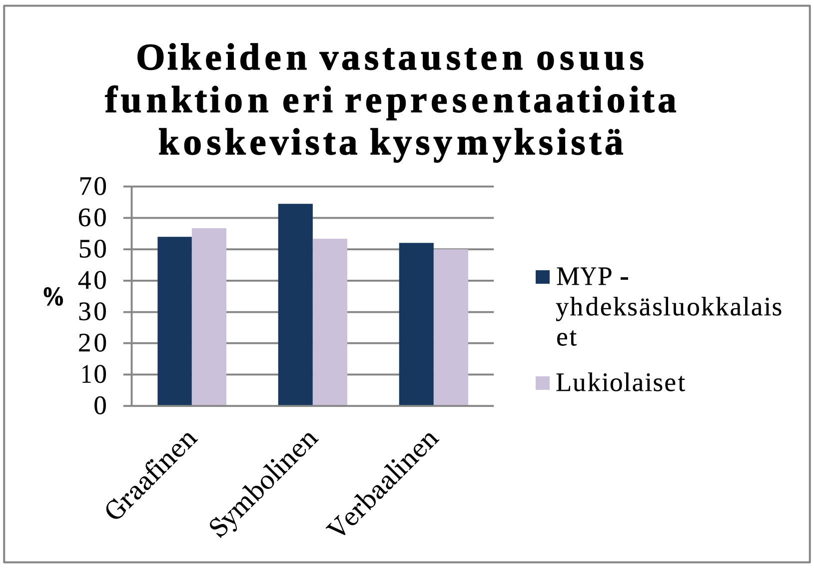
Kyselylomakkeessa tehtävä 2 mittasi funktion graafisen, tehtävä 3 symbolisen ja tehtävä 4 verbaalisen representaation hallintaa. Tehtävässä 2 oli yhteensä yhdeksän kysymystä, tehtävässä 3 viisi kysymystä ja tehtävässä 4 kaksi kysymystä. Nämä tehtävät pisteytettiin seuraavasti: oikeasta kyllä / ei vastauksesta sai yhden pisteen ja väärästä 0. Perusteluja ei huomioitu pisteytyksessä. Näin maksimipistemääräksi tuli 16.

Pisteiden jakauma on esitelty kuviossa 2. Pisteiden keskiarvoksi saatiin $\bar{x}=9{,}12$ ja otoksen keskihajonnaksi s=1,91. Alin pistemäärä oli 5 pistettä, ja pisteiden keskiarvo oli yli puolet maksimipistemäärästä. Tämä kertoo siitä, että funktioiden eri representaatioita on oivallettu kohtuullisella tasolla.



Kuvio 1 Funktioiden eri representaatioiden osaaminen Espoolaisessa MYP koulussa maksimipistemääränä 16.

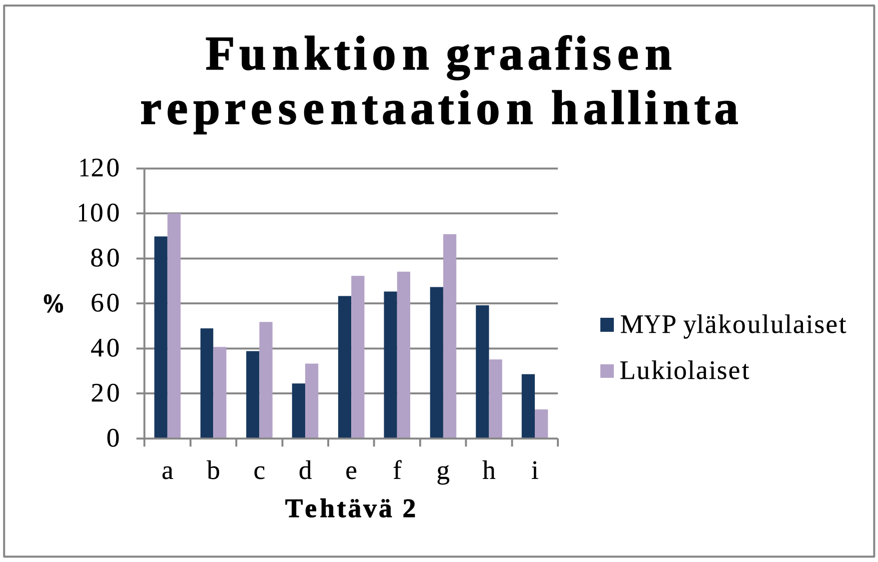
Funktion eri representaatioiden hallinta on esitelty kuviossa 3. Tulosten mukaan MYP-yhdeksäsluokkalaiset hallitsivat lukiolaisia paremmin funktion symbolisen ja verbaalisen representaation. Funktion graafista representaatiota koskevien kysymysten kohdalla moni funktioita käsitelleestä kurssikokeesta korkean arvosanan saanut oppilas hylkäsi kaikki esimerkit perustellen päätöstään sillä, että akseleita ei ollut nimetty. Mahdollisesti tästä syystä funktioiden graafisen representaation hallinta jäi MYP-yläkoulussa lukiolaisia alhaisemmaksi. Ryhmien väliltä ei löydetty tilastollisesti merkitsevää eroa ($p>0.1$) minkään representaation kohdalla. Tehtävät on analysoitu tarkemmin seuraavassa osiossa.



Kuvio 2 Oikeiden vastausten osuus funktion kolmea eri representaatiota koskevista kysymyksistä.

4.2.1 Graafinen representaatio

Kyselylomakkeen (liite 1) kysymyksessä kaksi kartoitettiin funktion käsitteen ymmärtämistä graafisen representaation kautta. Tehtävänä oli selvittää, kuvaavatko annetut kuvaajat ja kuvat funktiota vai eivät. Vertailukohteena olevat lukiolaiset ovat samana keväänä toteutetun Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaiset. Tulokset (kuvio 4) olivat keskenään yllättävän samankaltaiset. Ryhmien välillä ei ollut havaittavissa tilastollisesti merkittävää eroa ($t=-0.2365, df=16, p>0.1$).



Kuvio 3 Funktion graafinen representaation hallinta

Tehtävän 2a kuvaaja esittää kaikkialla jatkuvaa ja derivoituvaa funktiota, jonka lähtöjoukko sijaitsee vaakasuoralla akselilla ja maalijoukko pystysuoralla akselilla. Lähes kaikki yläkoululaiset tunnistivat tämän funktioksi. Ne yläkoululaiset (5), jotka väittivät, että kuvaaja ei esitä funktion kuvaajaa, antoivat perusteluksi, että koordinaatiston akseleita ei ole nimetty, eikä akseleille ole myöskään kerrottu skaalaa. Nämä samaiset oppilaat olivat pärjänneet erityisen hyvin funktiota käsittelevässä kurssikokeessa. Voisi siis melkein olettaa, että he olisivat tunnistaneet kuvaajan funktion kuvaajaksi, jos heille olisi nimetty akselit ja asetettu akseleille skaalat.

Tehtävässä 2b haluttiin selvittää, tunnistetaanko kuvaaja edelleen funktion kuvaajaksi, kun kyseessä on muuten samoin käyttäytyvä funktio kuin tehtävässä 2a, mutta nyt lähtöjoukko sijaitseekin pystysuoralla akselilla ja maalijoukko vaakasuoralla akselilla. Yllättäen suurempi osa yläkoululaisista kuin lukiolaisista oli oivaltanut tämän. Ero ryhmien välillä oli kuitenkin vain pieni. Yläkoululaisista hieman alle puolet tunnisti kuvion 11 kuvaajan funktion kuvaajaksi, ja lukiolaisista noin 41% piti kuvaajaa funktion kuvaajana. Yläkoululaisten perusteluna sille, että kuvaaja on funktion kuvaaja ja sille, että kuvaaja ei ole funktion kuvaaja, oli useimmiten se, että kuvaaja on kuten a-kohdan kuvaaja mutta se on käännetty sivuttain. Neljä yläkoululaista oli jälleen sitä mieltä, että kuvaaja ei ole funktion kuvaaja, koska x- ja y-akselia ei ole määritelty. Hämmennystä aiheutti myös kuvaajan aaltomuoto, koska yläkoululaiset olivat käsitelleet vain ensimmäisen ja toisen asteen funktioiden kuvaajia. Toiset pitivät kuvaajaa paraabelina ja toiset perustelivat, että se ei voi olla funktion kuvaaja, koska se ei ole paraabelin tavoin symmetrinen.

Tehtävässä 2c on esitetty kuvaaja funktiolle, joka ei ole kaikkialla derivoituva. Yläkoulussa ei puhuta derivoituvuudesta. Sen sijaan tutkitaan suoria ja paraabeleja. Koska tehtävän 2c funktio voidaan ajatella muodostuvan janoista siten, että se täyttää vielä funktion määritelmän, olisi yläkoululaisten pitänyt pystyä tunnistamaan kuvaaja funktion kuvaajaksi. Kuitenkin vain hieman alle 40% yläkoululaisista tunnisti kuvaajan funktioksi. Jälleen neljä oppilasta hylkäsi kuvaajan, koska x- ja y-akselia ei ole määritelty. 12 oppilasta, eli loput niistä oppilaista, jotka perustelivat vastauksiaan, kertoi, että kuvion 12 kuvaaja ei ole funktion kuvaaja sen sahalaitaisuuden vuoksi. Toisaalta myös vain puolet lukiolaisista, joiden olisi pitänyt olla jo tehnyt tuttavuutta kuvion 12 mukaisen kuvaajan kanssa, onnistui tunnistamaan kuvaajan funktion kuvaajaksi.

Tehtävän 2d kuvaaja esittää funktiota, jonka lähtöjoukko on epäyhtenäinen reaalilukujen osajoukko. Tämän kelpuutti funktion kuvaajaksi vain hyvin harva lukiolainen ja vielä harvempi yläkoululainen (24%). Yläkoululaisten materiaalissa oli yksi paloittain määritellyn funktion kuvaaja, mutta siinä lähtöjoukko oli kuitenkin yhtenäinen. Tämän huomioon ottaen on yllättävää, että näinkin moni yläkoululaisista oli oivaltanut kuvaajan esittävän funktiota. Ehdottomasti suurin osa yläkoululaisista perusteli väärää vastaustaan kuvaajan katkonaisuudella. Jälleen neljä oppilasta hylkäsi kuvaajan, koska x- ja y-akselia ei ole määritelty.

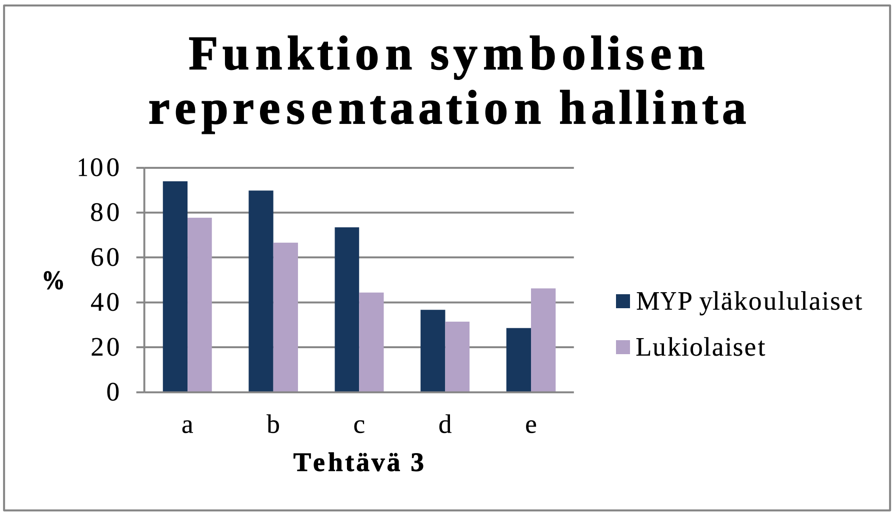
Tehtävässä 2e on esitetty kuvaaja, jonka maalijoukon arvot eivät määräydy yksikäsitteisesti jokaiselle lähtöjoukon arvolle. Näin ollen kuvion 14 kuvaaja ei siis ole funktion kuvaaja. Selvästi yli puolet yläkoululaisista (63%) ja lukiolaisista (72%) vastasi, että kuvion 14 kuvaaja ei esitä funktion kuvaajaa. Mutta valitettavan usein oikealla vastauksella oli väärä perustelu. Jälleen yleisin perustelu sille, miksi tehtävän 2e kuvaaja ei esitä funktiota, oli kuvaajan epäjatkuvuus eikä suinkaan yksikäsitteisyys. Sen sijaan joitakin vääriä vastauksia, eli kuvaaja oli luokiteltu funktion kuvaajaksi, oli perusteltu sillä, että kuvassa on kahden eri funktion kuvaajat. Vaikka tämä on totta, ei vastauksia voitu hyväksyä oikeaksi, koska tehtävänannon mukaan tilannetta oli tarkasteltava vain mahdollisena yhden funktion kuvaajana.

Tehtävä 2f esittää oppilaille geometriasta tuttua ympyrän kehää. Tarkoitus oli selvittää, oivalletaanko tästä tutusta muodosta, että se ei kuvaajana täytä funktion kuvaajan vaatimuksia. Suurin osa sekä yläkoululaisista (65%) että lukiolaisista (74%) oli sitä mieltä, että tehtävän 2f kuvaaja ei esitä funktiota. Yläkoululaiset hylkäsivät kuvaajan funktioksi kelpaamattomana perustellen sitä usein sillä, että kuvaaja esittää ympyrää eikä funktion arvojen yksikäsitteisyydellä. Ainoastaan yksi yläkoululainen perusteli vastaustaan sillä, että funktion kuvaaja ei voi mennä takaisinpäin eli toisin sanoen funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä. Neljä oppilasta hylkäsi kuvaajan, koska x- ja y-akselia ei ole määritelty. Suurin osa yläkoululaisista väitti kuvaajan esittävän heille samana keväänä trigonometrian kurssilla tutuksi tullutta yksikköympyrää ja käytti tätä perusteluna sille, että kuvaaja ei voinut olla funktion kuvaaja. Loput perustelivat vastaustaan kuten lukiolaiset, eli kuvaaja ei voinut esittää funktiota, koska se esittää ympyrää.

Tehtävissä 2g, 2h ja 2i kartoitettiin funktion käsitteen ymmärrystä yleisellä tasolla alkioiden kuvausten kautta. Lukiolaisille tällainen esitystapa ei ollut tuttu. Tämän vuoksi oikeiden vastausten lukumäärä tehtävän 2g kohdalla nousi korkeaksi, kun taas tehtävien 2h ja 2i oikeiden vastausten määrä jäi pieneksi (Hannula & Tuomi 2012). Yläkoululaisille esitystapa oli sen sijaan tuttu heidän oppimateriaalistaan, vaikka osa väittikin, että ei ollut nähnyt vastaavaa esitystapaa aikaisemmin. Oikeiden vastausten osuus kohosikin yläkoululaisilla kohdissa 2h ja 2i lukiolaisten oikeiden vastausten osuutta korkeammalle.

4.2.2 Symbolinen representaatio

Kyselylomakkeen kolmannessa kysymyksessä kartoitettiin funktion käsitteen ymmärtämistä symbolisen representaation kautta. Tehtävänä oli selvittää, kuvaavatko annetut lausekkeet ja yhtälöt funktiota vai eivät. Vertailukohteena olevat lukiolaiset ovat samana keväänä toteutetun Hannulan ja Tuomen (2012) tutkimuksen lukiolaiset. Yllättäen yläkoululaiset hallitsivat funktion symbolisen esitystavan aavistuksen verran lukiolaisia paremmin. Ryhmien välillä ei ollut kuitenkaan havaittavissa tilastollisesti merkitsevää eroa ($t = 0.703735,\ = 8,\ p > 0.1$). Tulokset on esitelty kuviossa 5.



Kuvio 4 Funktion symbolisen representaation hallinta

Tehtävässä 3 a oli yläkoululaisilla toisen asteen funktion lauseke $f(x) = 2x^2 + 5$ ja lukiolaisilla kolmannen asteen funktion lauseke $f(x) = 2x^3 + 5$. Ainostaan kolme yläkoululaisista ei kelpuuttanut toisen asteen funktion lauseketta funktion lausekkeeksi. Näistä yksi antoi perusteluksi sen, että määrittelyjoukkoa ei ole mainittu.

Tehtävässä 3 b oli origokeskisen yksisäteisen ympyrän yhtälö $y^2 + x^2 = 1$. Yllättäen yläkoululaiset onnistuivat vastaamaan tähän kysymykseen selvästi useammin oikein kuin lukiolaiset, vaikka ympyrän yhtälöä ei käsitellä vielä yläkoulussa. Ainoastaan neljä yläkoululaisista väitti yhtälön kelpaavan funktioksi, ja yksi jätti vastaamatta. Näistä väärin vastanneista ainoastaan yksi perusteli vastaustaan sillä, että y voi olla f. Sitä vastoin oikein vastanneista 22 perusteli vastaustaan sillä, että yhtälössä ei esiinny $f(x)$. Ainoastaan yksi perusteli vastaustaan funktion yksikäsitteisyydellä. Kolme oikein vastanneista väitti yhtälön esittävän suoraa, ja yksi perusteli jälleen yhtälön hylkäämistä sillä, että määrittelyjoukkoa ei ole mainittu. On siis hyvin mahdollista, että yhtälöä ei ole kelpuutettu funktioksi esitysteknisistä syistä sen sijaan, että olisi pohdittu, käyttäytyykö se funktiolle ominaisella tavalla.

Tehtävässä 3 c oli esitetty funktio $f(x) = \begin{cases} x, \text{kun} -42 \leq x < 0 \\ 5, \text{kun } 0 \leq x < 42 \end{cases}$. Myös tähän kysymykseen olivat yläkoululaiset onnistuneet vastaamaan oikein lukiolaisia selvästi useammin. Tämä oli yllättävää, koska tällainen funktion esitystapa oli mainittu yläkoulun tunneilla vain kerran. Tähän kysymykseen jätti vastaamatta 3 yläkoululaista, 10 yläkoululaista vastasi väärin ja 36 oikein. Seitsemän oikein vastanneista hyväksyi lausekkeen funktioksi, koska siellä esiintyi $f(x)$. Neljä oikein vastanneista vetosi siihen, että funktio oli hyvin määritelty ja yksikäsitteinen. Yksi oikein vastanneista väitti virheellisesti funktion olevan toiseen asteen funktio. Yksi väärin vastanneista hylkäsi funktion, koska sen yhteydessä ei ollut mainittu, että x kuuluu reaalilukujen joukkoon.

Tehtävässä 3 d kysyttiin, onko lauseke $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{kun } x > 5 \\ x-1, \text{kun } x < 7 \end{cases}$ funktion lauseke. Tässä ”funktio” saa esimerkiksi arvolla $x = 6$ kaksi eri arvoa, mikä tarkoittaa, että kyseessä ei ole funktio. Vain pieni osa niin yläkoululaisista kuin lukiolaisistakin sai tämän kohdan oikein. Yläkoululaiset onnistuivat vastaamaan tähän kysymykseen jälleen lukiolaisia hieman useammin oikein. Ainoastaan yksi yläkoululaisista jätti vastaamatta tähän kysymykseen. 18 vastasi oikein ja 30 väärin. Väärin vastanneista viisi kelpuutti lausekkeen funktioksi, koska siellä esiintyi $f(x)$. Yllättäen kaksi väärin vastanneista oli oikeilla jäljillä perusteluissaan, mutta ei ollut kuitenkaan uskaltanut väittää, että lauseke ei esitä funktiota. Heidän perustelunsa olivat:

” If x is less than 5 than it could work.”

“It would be a bad function, because if we state x as 6 because it is both x>5 and x<7.”

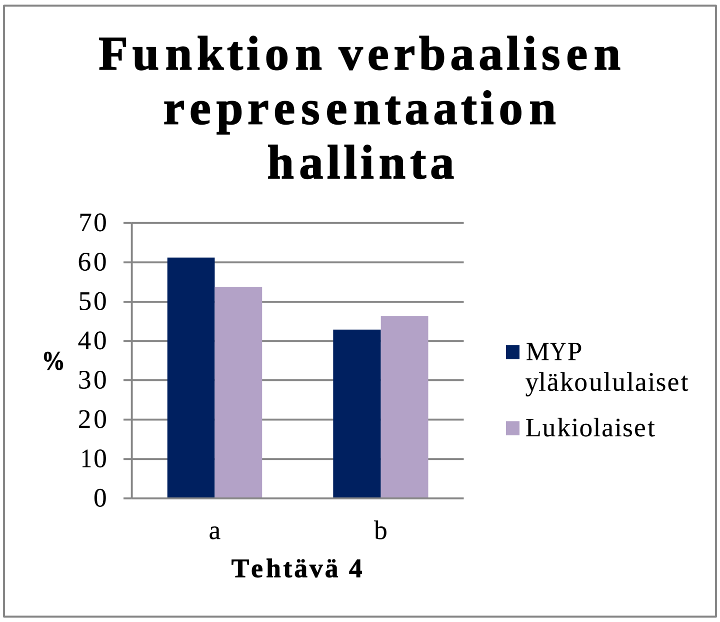
Näissä tapauksissa oli selvästi huomattu määrittelyjoukon ristiriitainen tilanne, vaikka ensimmäisessä tapauksessa ratkaisu ei toimisi, ja toisessa väitettiin sen olevan “huono funktio” eli funktio yhtä kaikki. Myös kolme oikein vastanneista oli perustellut vastaustaan oikein määrittelyjoukon ristiriitaisuudella. Yksi oikein vastanneista oli hylännyt jälleen funktion, koska missään ei kerrottu, että x kuuluu reaalilukujen joukkoon.

Tehtävässä 3 e kysyttiin, onko $f(x) = \begin{cases} 1, \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{kun } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ funktio. Tilanne oli muuten sama kuin edellisessä kysymyksessä (3 d), mutta nyt oppilaan täytyi muistaa ja ymmärtää, että rationaalilukujen joukko on reaalilukujen osajoukko. Ainoastaan tähän kysymykseen symboliseen representaatioon liittyvistä kysymyksistä vastasi useampi lukiolainen kuin yläkoululainen oikein. Hannula ja Tuomi (2012) toteavat kuitenkin tutkimuksessaan, että vaikutti siltä, että lukiolaiset eivät useasti lainkaan ymmärtäneet tätä merkintää. Yläkoululaisista 5 jätti vastaamatta tähän kysymykseen, 30 vastasi väärin ja 14 vastasi oikein. 4 väärin vastanneista yläkoululaisista käytti jälleen merkintää $f(x)$ perusteluna vastaukselleen. Ainoastaan yksi yläkoulun oppilas varsinaisesti perusteli vastauksensa. Hän vastasi oikein ja perusteli vastauksensa myös oikein:

” The f(x) cannot be at the same time 1 and 0.”

4.2.3 Verbaalinen representaatio

Kyselylomakkeen tehtävä neljä mittasi oppilaiden funktion verbaalisen representaation ymmärrystä. Jälleen tulokset (kuvio 6) olivat hyvin samankaltaiset kummassakin ryhmässä, eikä ryhmien välillä ollut havaittavissa tilastollisesti merkitsevää eroa ($t = 0.206093$, $= 2$, $p > 0.1$).



Kuvio 5: Funktion verbaalisen representaation hallinta.

Tehtävässä 4 a kysyttiin: onko olemassa funktiota, joka saa saman arvon kaikilla x ∈ ℝ? Oikeita vastauksia tähän kysymykseen oli yläkoululaisilla lukiolaisia hieman enemmän. Yläkoululaisista 5 jätti vastaamatta tähän kysymykseen, 14 vastasi väärin ja 30 oikein. Siinä, missä lukiolaiset antoivat myös esimerkkejä tähän kysymykseen (Hannula & Tuomi 2012), yläkoululaiset tyytyivät kirjoittamaan vain kyllä / ei vastauksia.

Tehtävässä 4 b kysyttiin: onko olemassa funktiota, joka saa yhdellä x kaikki y:n arvot? / is there a function that obtains all the values of y for only one value of x? Tähän kysymykseen jätti 6 vastaamatta, 22 vastasi väärin ja 21 oikein. Myös tähän kysymykseen olivat yläkoululaiset tyytyneet vastaamaan vain kyllä tai ei. Ainoastaan kaksi oikein vastannutta oli perustellut vastaustaan. Perusteluna oli käytetty funktion yksikäsitteisyyttä.

4.3 Mitä yhteyksiä on havaittavissa funktiokäsityksen ja yläkoulun päättöarvosanan välillä MYP:n Espoossa läpikäynneillä yhdeksäsluokkalaisilla?

Koska koehenkilöiden lukumäärä kutakin funktiokäsitysluokkaa kohden on niin pieni (alle 10 jokaisessa luokassa), ei tilastollisten testien suorittaminen ole mahdollista. Aineiston pienuuden vuoksi tuloksista ei myöskään voida vetää varsinaisia johtopäätöksiä, vaan ne ovat parhaimmillaankin vain suuntaa antavia.

Kuvio 7 Päättöarvosanajakauma funktiokäsitysluokittain

Oppilaat, jotka määrittelivät funktion vastaavuuden kautta (luokka 1), vaikuttaisivat olevan matemaattisesti orientoituneita oppilaita. Heidän päättöarvosanojensa keskiarvo oli 9,8 ja vaihteluvälin pituus 1. Viidestä oppilaasta ainoastaan yksi sai arvosanan yhdeksän ja loput saivat arvosanan 10. Yhdeksännen luokan matematiikan tunneilla nämä oppilaat osoittivat äärimmäistä kiinnostusta matematiikkaa kohtaan: asioiden ymmärtäminen ja matemaattisesti oikein ilmaiseminen oli heille tärkeää. Motivaatiota riitti myös kotiläksyjen tekemiseen. Ymmärryksen lisäksi hyvän arvosanan saavuttaminen oli heille tärkeää. Heitä voisi jopa kuvailla perfektionistisiksi luonteiksi matematiikan suhteen.

Riippuvuusrelaation kautta (luokka 2) funktion määritelleet oppilaat vaikuttaisivat sen sijaan olevan tasaisen hyviä oppilaita. Heistä jokaisen (5 oppilasta) matematiikan päättöarvosana oli 9 (keskiarvo 9, vaihteluvälin pituus 0). Yhdeksännen luokan aikana nämä oppilaat olivat hyvin arvosanaorientoituneita. He opiskelivat kokeeseen paljon, mutta eivät kokeneet tunnilla työskentelyä tai joka kerta kotiläksyjen tekemistä kovinkaan tärkeäksi. Nämä oppilaat tuntuivat olevan luonteeltaan hyvin sosiaalisia.

Oppilaat, jotka määrittelivät funktion säännön kautta (luokka 3), päätyivät saamaan matematiikan päättöarvosanakseen 8 (keskiarvo 8, vaihteluvälin pituus 0). Nämä oppilaat tuntuivat yhdeksännen luokan aikana olevan motivoituneita matematiikan opiskeluun lähinnä vain vanhempien painostuksesta. He olivat taipuvaisia käyttämään matematiikan tunnit haaveiluun, eikä aktiivinen osallistuminen tuntiin ollut millään lailla heille tärkeää. Kokeissa he tekivät erikoisia virheitä, mutta pääpirteissään osasivat asiat hyvin. Luonteeltaan he vaikuttivat olevan hyvin introverttejä.

Operaation kautta (luokka 4) funktion määritelleet oppilaat saivat tässä aineistossa matematiikan päättöarvosanakeskiarvon 8,4 vaihteluvälillä, jonka pituus on 3. Nämä oppilaat antoivat hyvin erilaiset kuvat itsestään yhdeksännen luokan aikana. Tämä ryhmä pitää sisällään erilaisia oppilaita niin luonteenpiirteiltään, motivaatioltaan kuin työskentelytavoiltaankin. Heille yhteistä tuntui olevan ainoastaan se, että he eivät tuntuneet kokevan aktiivista tuntityöskentelyä tärkeäksi.

Oppilaat, jotka päätyivät määrittelemään funktion kaavan kautta (luokka 5), saavuttivat tässä aineistossa matematiikan päättöarvosanakeskiarvon 9,3 (vaihteluvälin pituus 2). Matematiikan tunneilla he osoittivat pyrkimystä ymmärtämiseen. He kuuntelivat tarkasti, mitä opettaja asiasta heille kertoi, pohtivat sitä ja esittivät kysymyksiä. Tunnilla aktiivinen työskentely oli heille tärkeää, kuten myös hyvän arvosanan saavuttaminen. Näillä oppilailla tuntui olevan selkeä sisäinen motivaatio.

Representaation kautta funktion määritelleet oppilaat (luokka 6) saavuttivat matematiikan päättöarvosanakeskiarvon 9 (vaihteluvälin pituus 2). Vuoden mittaan kävi selväksi, että hyvän arvosanan saavuttaminen oli näille oppilaille tärkeää. He pyrkivät osallistumaan tunnilla, vaikka olivatkin taipuvaisia puuhastelemaan jotain muuta tunnin aikana. He kuitenkin pyrkivät itse aktiivisesti ymmärtämiseen.

Oppilaat, jotka määrittelivät funktion edellisiin luokkiin sopimattomalla tavalla (luokka 7), saavuttivat matematiikan päättöarvosanakeskiarvon 8,5 (vaihteluvälin pituus 3). Vuoden mittaan näytti siltä, että henkinen läsnäolo tunneilla oli näille oppilaille haastavaa. Tunnilla oltiin aktiivisia vain, jos siitä oli sillä hetkellä hyötyä. Muuten keskityttiin aivan muihin asioihin. Kokeeseen kuitenkin opiskeltiin niin, että siitä päästiin varmasti läpi.

Oppilaat, jotka eivät määritelleet funktiota lainkaan tai vastasivat ”en tiedä” (luokka 8), saivat matematiikasta päättöarvosanakeskiarvon 7,8 (vaihteluvälin pituus 3). Tästä ryhmästä löytyy oppilaita, jotka vuoden mittaan osoittivat äärimmäistä laiskuutta opiskelun suhteen (matematiikan läksyt lähes aina tekemättä), ja toisaalta taas oppilaita, joilla oli aina kotitehtävät tehtynä, mutta ahkeruudesta ja jopa kyvykkyydestä huolimatta usko itseen / omiin matemaattisiin kykyihin oli vähäinen.

5 Pohdinta

Tutkimuksen kohteena oli hyvin erityinen joukko oppilaita, joten tuloksia on tulkittava varoen. MYP-yläkouluja on Suomessa yhteensä vain 5, mikä tarkoittaa, että tutkimuksen yläkoululaiset poikkesivat opetusideologian puolesta valtaosasta Suomen yläkoululaisista. Erilaisen opetusideologian lisäksi tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat oppivat funktiokäsitteen materiaalista, joka ei ole ollut saatavilla muissa yläkouluissa. On siis mahdollista, että tähän tutkimukseen osallistuneiden yläkoululaisten vastaukset poikkeavat myös muiden MYP-yläkoulujen oppilaiden vastauksista. On myös mahdollista, että tutkittaessa saman koulun oppilaita muutamaa vuotta myöhemmin saataisiin erilaisia tuloksia: tutkimukseen osallistunut koulu IB-sertifioitiin, kun tutkimukseen osallistuneet yläkoululaiset olivat yhdeksäsluokkalaisia. Koulu oli kuitenkin noudattanut MYP:n opetusideologiaa jo kaksi edellistä vuotta. Näin ollen tutkimukseen osallistuneet yhdeksäsluokkalaiset olivat ensimmäinen ikäluokka kyseissä koulussa, joka oli opiskellut MYP:n mukaisesti. MYP oli uusi tuttavuus myös koulun opettajille, jonka lisäksi tutkimukseen osallistuneiden yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden matematiikan opettaja vaihtui kahdeksannen luokan jälkeen opettajaan, joka tutustui tuolloin vasta ensimmäistä kertaa MYP:en. Nämä tekijät tekevät yleistettävyyden Middle Years Programme -oppilaisiin hyvin kyseenalaiseksi.

Otos pitää sisällään kyseisen vuosiluokan kaikki heikoimmat oppilaat, mutta ei vahvimpia. Tämän lisäksi monet kurssikokeessa hyvin pärjänneet oppilaat hylkäsivät kaikki kuvaajat, koska akseleita ei ollut nimetty. Nämä tekijät saattavat vääristää tuloksia funktion hallinnasta käsitteenä todellisuutta alhaisemmiksi.

Kuten tässä tutkimuksessa MYP-yläkoululaisten, myös Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksessa college-opiskelijoiden ja junior high school –opettajien piti päättää, esittääkö jokin kuvista tai yhtälöistä funktiota, ja sen jälkeen antaa perustelut päätökselleen. Kummassakin tutkimuksessa oli löydettävissä tapauksia, joissa perustelu oli oikein, mutta vastaus väärin ja toisin päin. Näyttäisi siis, että hämmennys funktiokäsitteen suhteen ei ole sidoksissa ikään tai opintojen määrään.

Tässä tutkimuksessa ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa lukiolaisten ja yläkoululaisten välillä oikeiden vastausten lukumäärissä. Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksessa ei myöskään havaittu merkittäviä eroja korkeamman tason matematiikka opiskelevien ja matalamman tason matematiikkaa opiskelevien college-opiskelijoiden välillä. Herää kysymys, muodostuuko funktiokäsitys siis jo yläkoulussa, ja sitä on sen jälkeen enää hankala muuttaa. Vastauksen saaminen tähän kysymykseen vaatisi huomattavasti laajempaa pitkittäistä jatkotutkimusta.

Funktion oikein eli vastaavuden kautta määritelleet oppilaat olivat kaikki matematiikassa ansioituneita oppilaita. Samoin Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksessa kaikista eniten matematiikkaorientoituneet henkilöt määrittelivät funktion vastaavuuden kautta. Herää kysymys, tulisiko matematiikan opetuksessa painottaa vastaavuuden kautta funktion esittämistä jo yläkoulussa.

Toisaalta opettaja voi antaa virallisen määritelmän funktiosta ja työskennellä yleisen notaation parissa hetken, ennen kuin hän viettää pitkiä aikoja käyttäen esimerkeissään vain kaavoja. Tällaisessa tapauksessa käsitteeseen liittyvä mielikuva voi kehittyä rajoitetumpaan notaatioon, jossa on vain kaavoja. Oppilas on voitu jopa opettaa vastaamaan oikealla virallisella määritelmällä, vaikka hänen käsitteeseen liittyvä mielikuvansa on puutteellinen tai jopa väärä. (Tall & Vinner 1981.) MYP-yläkoululaisten oppimateriaaliin oli yritetty sisällyttää funktiotehtäviä funktion eri representaatioita mahdollisimman monipuolisesti käyttäen. Tulokset antaisivat ymmärtää tämän lähestymistavan kantaneen hedelmää.

Oppimateriaalin laatiminen ja kurssin opettaminen tapahtuivat kuitenkin ennen tutkimuksen aloittamista. Kumpaakaan ei siis toteutettu ennakoiden tulevaa kyselylomakkeen täyttöä.

Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksessa korkeamman tason matematiikan opiskelijat perustelivat enemmän ja paremmin heidän vastauksiaaan kuin matalamman matematiikan tason opiskelijat. Yllättäen MYP-yläkoululaiset perustelivat vastauksia huomattavasti enemmän kuin lukiolaiset. Tähän voi olla kuitenkin syynä Hannulan ja Tuomen (2012) kyselylomake, johon ei ollut jätetty erikseen tilaa perusteluille, kuten yläkoululaisten lomakkeessa oli. Toisaalta MYP vaatii oppilaita reflektoimaan jatkuvasti omaa työtään ja ilmaisemaan itseään kirjallisesti myös matematiikassa. Olisi mielenkiintoista tutkia, antavatko MYP:n läpikäyneet oppilaat herkemmin perusteluja vastauksilleen kuin muut yläkoululaiset.

Saatujen tulosten valossa voidaan uuden opetussuunnitelman lähestymisen Middle Years Programme –opetusta nähdä positiivisena asiana.

Lähteet

Gagatsis, A. & Elia, I. (2007). Representations and the concept of function, E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (toim.). *Current Trends in Mathematics Education. 5th Mediterranean Conference on Mathematics Education 13-15 April 2007,* Rhodes Greece. New Technologies Publications, Athens.

Hannula, J. & Tuomi, O. (2012) *Funktion käsite lukiolaisten mielikuvissa*. Opettaja työnsä tutkijana seminaari 2011-2012. Helsinki: Helsingin yliopisto.

IBO (2013) International Baccalaureate Organization. 28.9.2013. http://www.ibo.org/myp/

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. Teoksessa C. Janvier (toim.). *Problems of Representationin the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale: New Jersey.

LOPS (2004). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Helsinki: Opetushallitus.

Nummenmaa, L. (2007). *Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät*. Vammala: Tammi.

OPSL (2012). *Opetussuunnitelman perusteluonnokset, syksy 2012.* Helsinki: Opetushallitus.

POPS (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.

Salminen, J.F.A. (2013). *Funktiokäsityksestä ja matematiikkakuvasta suomalaisessa Middle Years Programme -yläkoulussa*. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Seitamaa-Hakkarainen, P. (2000). *Kvalitatiivinen sisällönanalyysi.* Luettu 19.8.2012http://helsinki.academia.edu/PiritaSeitamaaHakkarainen/Papers/592612/Kvalitatiivinen_sisallon_analyysi

Schwarzenberger, R. L. E. & Tall, D. O. (1978). Conflict in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching 82*, 44–9.

Tall, D. & Vinner, S (1981). Concept Image and Concept Definition inMathematics with particular reference to Limits and Continuity. Teoksessa *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151– 169.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). *Images and definitions for the concept of function.* Journal for Research in Mathematics Education, 20, (4), 356-366.

LIITE 1. Kyselylomake 2012

Kyselylomake 2012 / Questionnaire 2012

1. Nimi/ Name:

2. Ikä/ Age:

Osio 1: Funktiokäsitys / Function conception

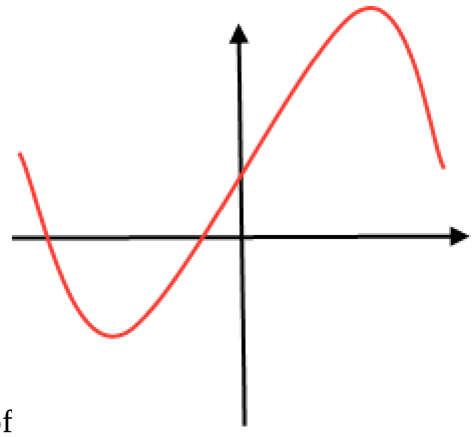
1. Määrittele, mikä on funktio. / Define what a function is.

2. Rastita ruutu, jonka koet olevan oikea vastaus kysymykseen. / Please check the box that you think is correct.

A) Onko tämä funktion kuvaaja? / Is this a graph of a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

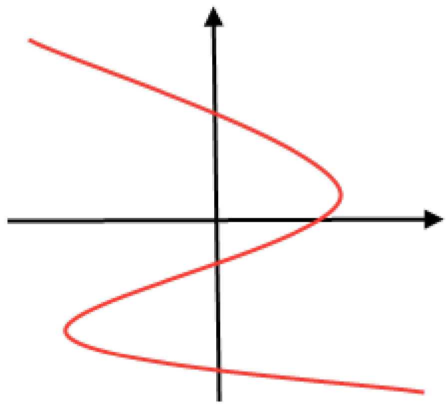
Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?



B) Onko tämä funktion kuvaaja?/ Is this a graph of

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?



C) Onko tämä funktion kuvaaja? / Is this a graph of a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

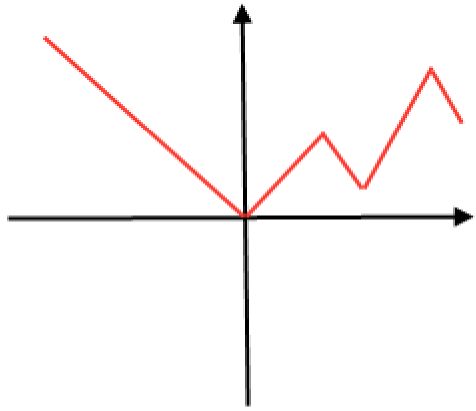
____

____

____

____

____



D) Onko tämä funktion kuvaaja? / Is this a graph of a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

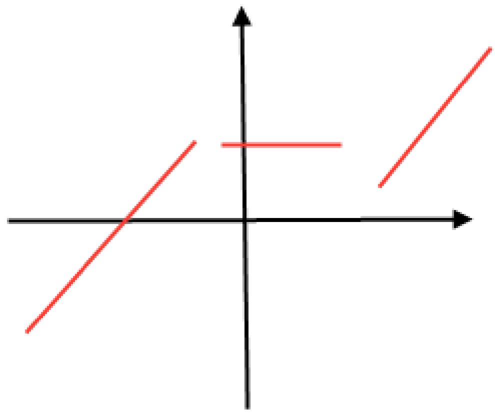
____

____

____

____

____



E) Onko tämä funktion kuvaaja? / Is this a graph of a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

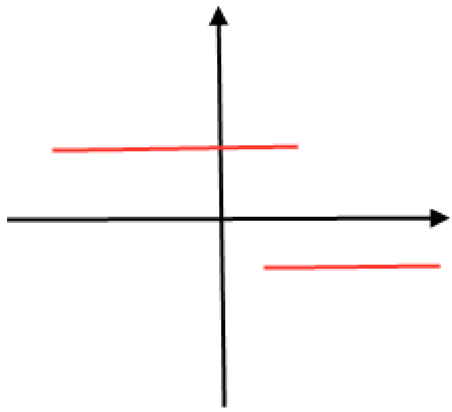
____

____

____

____

____



F) Onko tämä funktion kuvaaja? / Is this a graph of a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

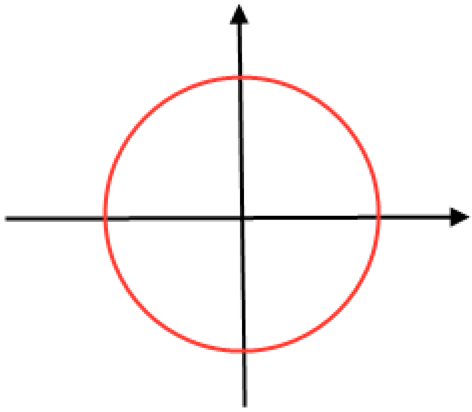
____

____

____

____

____



tio? / Is this a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

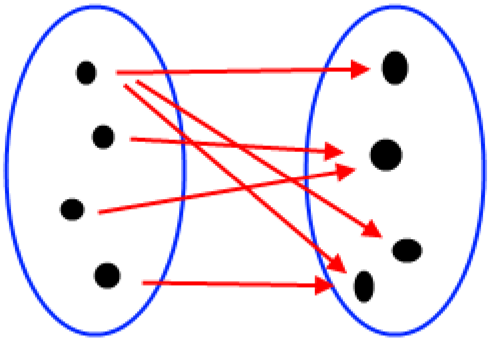
____

____

____

____

____



H) Onko tämä funktio? / Is this a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

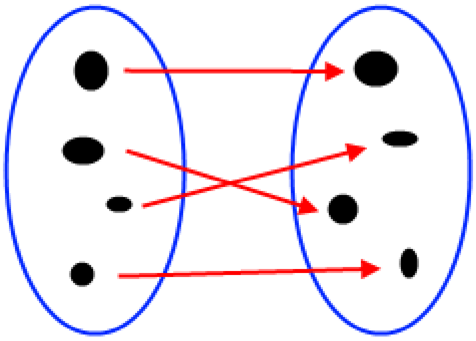
____

____

____

____

____



I) Onko tämä funktio? / Is this a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

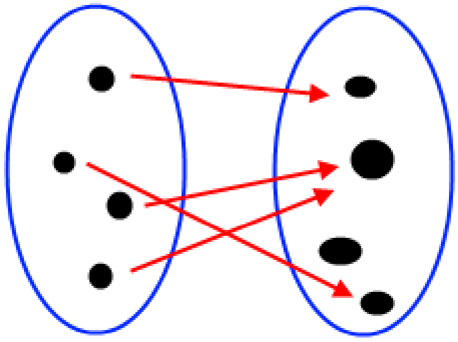
____

____

____

____

____



3.

A) Onko yhtälö $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}$ funktio? / Is the equation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}$ a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

____

____

____

____

B) Onko yhtälö $\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$ funktio? / Is the equation $\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$ a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

____

____

____

____

C) Onko $f(x) = \begin{cases} x, \text{kun} -42 \leq x < 0 \\ 5, \text{kun } 0 \leq x < 42 \end{cases}$ funktio? /

Is $f(x) = \begin{cases} x, \text{when} -42 \leq x < 0 \\ 5, \text{when } 0 \leq x < 42 \end{cases}$ a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

____

____

____

____

D) Onko $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{kun } x > 5 \\ x-1, \text{kun } x < 7 \end{cases}$ funktio? / Is $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{when } x > 5 \\ x-1, \text{when } x < 7 \end{cases}$ a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

____

____

____

____

E) Onko $f(x) = \begin{cases} 1, \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{kun } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ funktio? / Is $f(x) = \begin{cases} 1, \text{when } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{when } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ a function?

kyllä / yes ☐ ei / no ☐

Miksi tai miksi ei?/ Why or why not?

____

____

____

____

4.

A) Onko olemassa funktiota, joka saa saman arvon kaikilla $x \in \mathbb{R}$? / Is there a function that obtains the same value for every $x \in \mathbb{R}$?

____

____

____

B) Onko olemassa funktiota, joka saa yhdellä x kaikki y:n arvot? / Is there a function that obtains all the values of y for only one value of x?

____

____

____