

Kielentämisen näkökulmia kuudennen luokan oppilaiden matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuihin

Marja-Kaisa Kortesalmi¹, Päivi Perkkilä² ja Jorma Joutsenlahti³

¹ Oulaisten kaupunki

² Kasvatustieteellinen tiedekunta, Jyväskylän yliopisto

³ Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Tampereen yliopisto

Tiivistelmä: Artikkelissa tarkastellaan kuudennen luokan lopussa oppilaiden tuottamia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Tutkimuksen toteutti matemaattiseen ajatteluun ja sen kielentämiseen perehtynyt opettaja. Tutkimukseen osallistui 35 kuudennen luokan oppilasta. Tutkimusaineistona olivat oppilaiden kirjalliset ratkaisut kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Oppilaat kuvasivat kielentämisen keinoin omaa matemaattista ajatteluaan sekä tehtävien tuottamisessa että ratkaisuprossien avaamisessa. Tuloksista on nähtävissä, että oppilailla oli taitoja kielentää monipuolisesti matemaattista ajatteluaan. Matematiikan opetuksessa olisikin hyvä ohjata oppilaita ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan monipuolisesti ja täsmällisesti kielentämisen keinoin.

Asiasanat: matemaattinen ajattelu, kielentäminen, sanalliset ongelmanratkaisutehtävät

Yhteystiedot: marja-kaisa.kortesalmi@oulainen.fi

1 Johdanto

Vuosina 2018–2022 toteutetussa LUMATIikka-ohjelmassa (ks. tarkemmin tämän teemanumeron [pääkirjoitus](#)) on järjestetty valtakunnallista matematiikan opetuksen täydennyskoulusta varhaiskasvatukseen, esiopetuksen, perusopetuksen ja toisen asteen opettajille. Alaluokkien opettajille suunnatuissa koulutusosioissa on perehdytty muun muassa alaluokkien matematiikan keskeisten käsitteiden opettamiseen, eriyttämisen keinoihin, matematiikan opetuksen konkretisointiin sekä matemaattisen ajattelun kielentämiseen. Tässä artikkelissa tarkastellaan erityisesti matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitystä alaluokkien matematiikan opetuksessa. Luokanopettaja Marja-Kaisa Kortesalmi on osallistunut matemaattisen ajattelun kielentämisen koulutukseen ja painottanut kielentämistä omassa matematiikan opetuksessaan. Hän on toteuttanut tässä artikkelissa esiteltävän tutkimusintervention kielentämisen merkityksestä.



Tutkimuksissa (mm. Perkkilä ym., 2018; Joutsenlahti ym., 2017; Perkkilä, 2002) on tuotu esille, että Suomessa matematiikan opetusta oppitunneilla ohjaavat suurelta osin enemmän matematiikan oppikirjat ja opettajan oppaat kuin matemaattiset sisällöt ja opetussuunnitelma. Edellä mainitusta voidaan käyttää nimitystä perinteinen matematiikan opetus, joka perustuu oppikirjasidonnaiseen opetustapaan. Oppikirjasidonnaiseen tapaan toteuttaa opetusta liittyy luottamus siihen, että oppikirjat noudattavat kulloinkin voimassa olevaa opetussuunnitelmaa. (vrt. Perkkilä ym., 2018; Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Perkkilä, 2002). Näin siis hyvin usein oppikirja on keskeisemmässä roolissa kuin opetussuunnitelma opetuksen suunnittelussa – varsinkin Suomessa oppikirja vaikuttaa erittäin voimakkaasti opetuksen aiheiden sisältöön ja järjestykseen. Oppikirjaan perustuvassa opetuksessa lähes kaikki opettajien esittämät esimerkit ja harjoitukset perustuvat käytössä olevaan matematiikan oppikirjaan, ja opetus on opettajajohtoista. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilaat työskentelevät matematiikan oppikirjan sisältöjen mukaisesti sekä oppituntien aikana että kotona koti-tehtäviä tehdessään. Oppilaalle voi muodostua hyvinkin kapea kuva matematiikasta laskemisena ja tehtäväkirjan täyttämisenä. (Lepik ym., 2015; Viholainen ym., 2015.)

Perusopetuksen opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2014) kuitenkin ohjeistaa, että opetuksen tulisi lähteä oppilaille tutuista, kiinnostavista aiheista ja ongelmista. Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua, joka luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle. Samalla opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia.

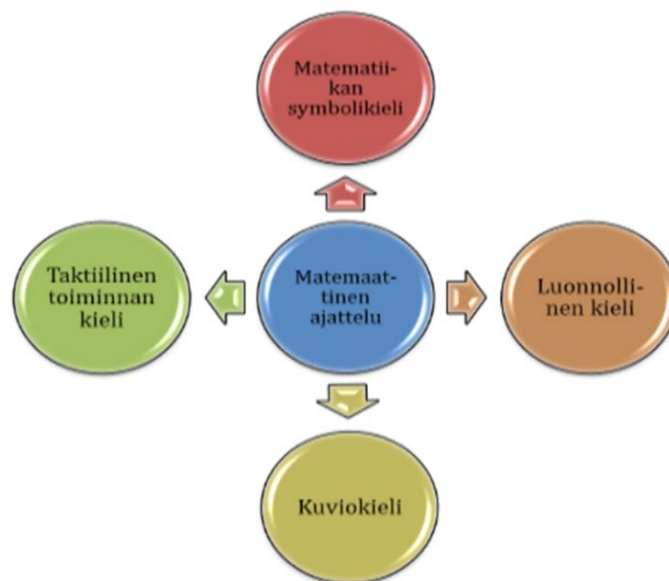
Edellä mainittu liittyy kielentämisen pedagogiikkaan, missä painotetaan matemaattisen ajattelun monipuolista ilmaisua taktiilisen toiminnan kielen, puhutun kielen (luonnollisen kielen), kuviokielen (kuvia tulkiten tai piirtäen kuvia) sekä matematiikan symbolikielen avulla. Tähän haasteeseen ei pystytä vastaamaan yksistään oppikirjaan sitoutuvalla opetuksella. Opettaja on asiantuntija, jolla tulee olla opetustyön suunnittelun pohjana sisältötietoa sekä pedagogista että opetussuunnitelmallista tietoa (Shulman, 1986). Kun opettajalla on teoreettinen perusta opetuksensa suunnittelun tukena, hänen on mahdollista perustella opetukseen liittyviä valintojaan niin oppilaille, kollegoilleen kuin vanhemmille. Kielentämisen pedagogiikan käyttäminen matematiikan opetuksessa tarjoaa opettajalle monipuolisia keinoja matemaattisen ajattelun kehittämiseen oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä. Näin onkin

mielenkiintoista tarkastella tässä artikkelissa oppilaiden tuottamia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään.

2 Matematiikan kielentämisestä

Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) sanoin matematiikan opetuksen tärkeä tehtävä on auttaa oppijaa paitsi rakentamaan ja sisäistämään matematiikan sisällöistä tietorakenne niin, että kaikilla yksityiskohdilla on selkeä merkitys, niin myös soveltamaan tietoa ymmärryksen mukaisesti uusiin tilanteisiin eikä vain toistaa muistinvaraisesti. Tässä kaikessa oppijaa auttaa matematiikan kielentäminen, joka tarkoittaa matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla. Kieli jäsentää ja kehittää opiskelijan ajattelua, ja toisaalta uudet ajatukset mahdollistavat käsitteiden ja prosessien monipuolisemman kielellisen kuvaamisen ja sen syvällisemmän ymmärtämisen. Tällainen opiskelu vaatii matematiikan symbolikielen rinnalla luonnollisen kielen ja kuviokielen joustavaa ja tarkoituksenmukaista käyttöä matemaattisen ajattelun ilmaisussa. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018.)

Opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) on luokille 1–6 kirjattu tavoitteeksi ”kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen”. Joutsenlahti ja Rättyä (2015) havainnollistavat matematiikan opiskelussa käytettäviä kieliä kuvion 1 mukaisesti.



Kuvio 1. Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen neljän kielen avulla: luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli (Joutsenlahden & Rättyä, 2015)

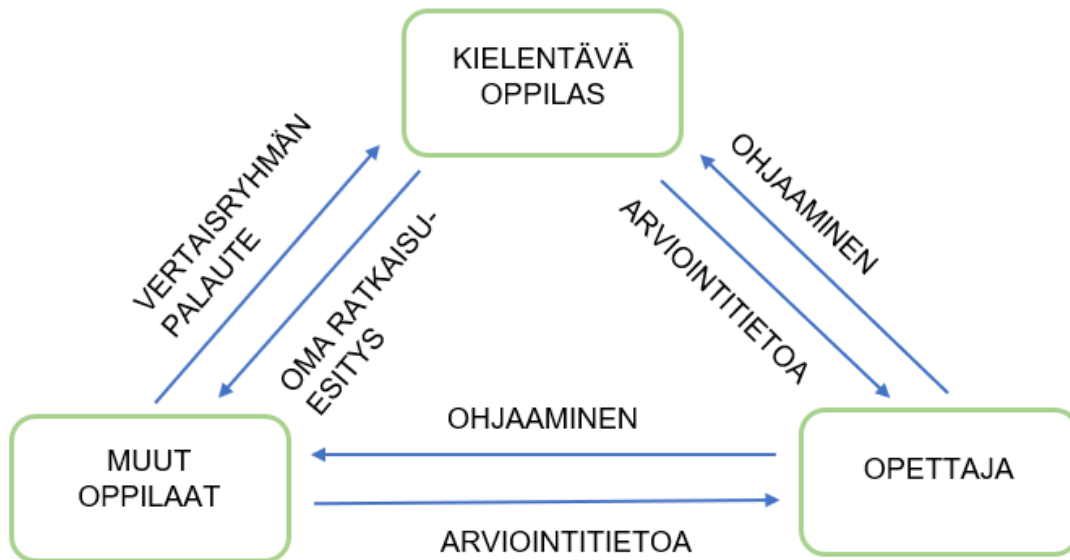
Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan matematiikan kielentämiseen kuuluvat luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli, joka on erityisesti alakoulussa keskeinen matemaattisen ajattelun ilmaisun kieli. Kielentämisen periaatteet ovat löydettävissä myös *Varga-Neményi-menetelmän* periaatteista. Periaatteiden mukaan oppilasta kannustetaan tuomaan esille ajatteluaan monipuolisesti kaikilla kuvion 1 neljän kielen mallin tavoilla, joista tyypillisimpiä eli suullista ja kirjallista kielentämistä suhteessa muihin matemaattisen ajattelun ilmaisemisen kieliin kuvataan vielä tarkemmin seuraavaksi.

2.1 Suullisesta kielentämisestä

Luonnollisen kielen käyttö on matematiikan tunneilla pääosassa, kun ryhmässä käydään keskustelua opetettavasta asiasta, tehtävien ratkaisemisesta tai opeteltavien käsitteiden merkityksien rakentumisesta. Kun oppilas kertoo oman ratkaisunsa esimerkiksi laskemastaan matematiikan tehtävästä, hänen on ensin jäseneltävä ajatuksensa itselleen, ennen kuin hän voi sanallistaa sitä muille. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan oman ajattelun jäsentäminen tukee matemaattisten käsitteiden syvällisempää ymmärtämistä.

Matematiikan tunneilla suullinen kielentäminen voi olla opettajajohtoista, pienryhmäkeskustelua tai parikeskustelua Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan. Keskustelussa mukana oleminen ja sen kuunteleminen antaa opettajalle mahdollisuuksia havainnoida oppilaille virheellisesti muodostuneita matemaattisia käsityksiä ja huomioida ne opetuksessa. Lisäksi oppilaiden puhe helpottaa opettajaa myös arvioinnissa. Arvioinnin tekeminen on luotettavampaa, kun oppilas käyttää luonnollista kieltä symbolikielen lisäksi. Tällöin matemaattisten käsitteiden käyttö on osa oppilaan käyttämää puhetta, jonka kautta opettaja saa syvällisempää tietoa oppilaan matemaattisesta ymmärryksestä. (Joutsenlahti & Kulju, 2015).

Yksi varteen otettava seikka suullisessa kielentämisessä on myös se, että kuuntelemalla luokkakaveriaan oppilas voi samalla peilata omia käsityksiään kuultuun ja tehdä vertailuja käsityksien välillä. Näin oppilaan omat käsitykset saattavat vahvistua tai päinvastoin keskustelu saattaa johtaa kahden vastakkaisen käsityksen väliseen pohdiskeluun yhdessä koko opetusryhmän kanssa. Kuvio 2 havainnollistaa sitä, kuinka matematiikan kielentäminen näkyy opetustilanteissa opiskelija, opettajan ja muun ryhmän näkökulmasta.



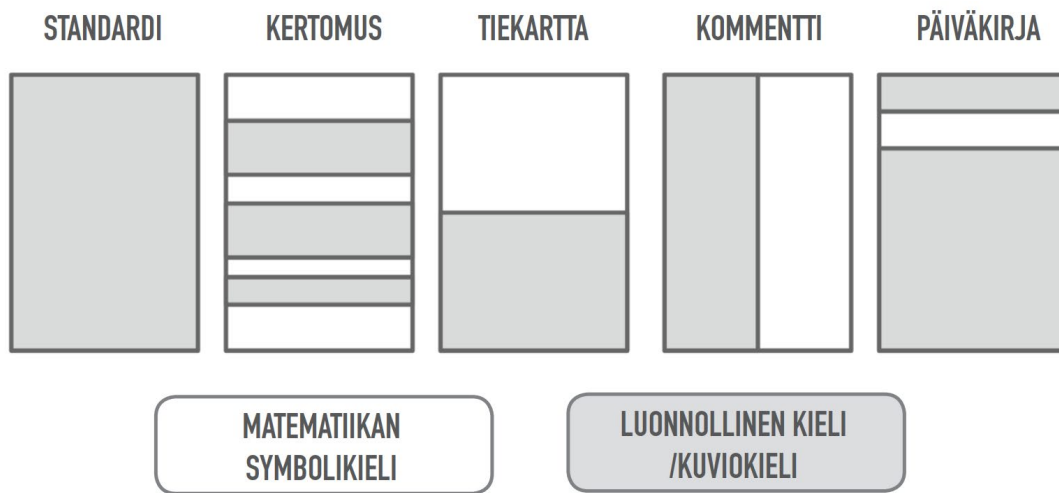
Kuvio 2. Matematiikan kielentäminen oppilaan, opettajan ja muun ryhmän näkökulmista Joutsenlahtea (2003) mukaillen.

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) tuovat esille mielenkiintoisen näkökulman matemaattisen ajattelun kielentämiseen variaatioteorian pohjalta. Variaatioteorian lähtökohtana on se, että havaitsemme ilmiöiden merkittävistä puolista yleensä vain osan ja havaintomme ilmiöstä ovat ylipäättään subjektiivisia ja usein tulkinnanvaraisia. Kun luokassa käydään keskustelua matemaattisista ongelmista, näkökulmia tulee esille aina useampia. Matematiikan kielentämisessä on kysymys juuri näiden erilaisien havaintojen ja tulkintojen jakamisesta muiden oppijoiden kanssa kuin myös oppijan itsensä kanssa. Tässä ajattelu tulkitaan oppilaan sisäiseksi vuoropuheluksi, jolloin oppilas jakaa havaintoja myös itsensä kanssa. On hyvä huomata, miten opettajan tuella oppilaan omien ajatusten esittämiselle on merkitystä myös muiden oppilaiden kannalta. Oppilaita kannattaa ohjata siten, että heidän esittämistään ajatteluprosesseista on hyötyä myös vertaisoppijoille. Opettajan ohjaava rooli rohkaisee oppilaita tuomaansa ajattelunsa näkyväksi puhuen, kirjoittaen, taktiilisesti ja piirroksin. Opettaja on kuulija, joka tukee oppilaiden ajatteluprosesseja ja tarvittaessa ohjaa oppilasta tämän lähikehityksen vyöhykkeellä tuomaan monipuolisesti esille matemaattista ajatteluaan.

2.2 Kirjallisesta kielentämisestä

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) viittaavat artikkelissaan Morganiin (2001), jonka mukaan monipuolinen kirjoittaminen matematiikan tehtävien ratkaisemisen aikana edistää matematiikan oppimista, kehittää sen ymmärtämistä, parantaa oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan ja helpottaa opettajan arviointityötä. Kirjoittaminen jäsentää oppilaan ajatuksia niin hänelle itselleen kuin myös muille oppilaille.

Joutsenlahti (2009) on esittänyt viisi kirjallisen kielentämisen mallia, joita voi soveltaa matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämisessä. Mallit ovat standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamallit (ks. kuvio 3).



Kuvio 3. Kirjallisen kielentämisen ratkaisumallit: standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamalli (Joutsenlahti, 2018)

Standardimallin käyttö perustuu symbolikieleen. Kertomusmallissa matemaattisen ongelman ratkaisemiseen käytetään symbolikielen lisäksi sanallista ja/tai kuviokieltä selventämään sekä itselle että toisille, miten ratkaisu on tehty. Kun oppilas aloittaa ongelman ratkaisun kirjallisesti tai käyttämällä kuviota, puhutaan tiekarttamallin käytöstä matematiikan kirjallisessa kielentämisessä. Tällöin symbolikieli tulee vasta vastauksen päätteeksi. Jos matematiikan symboli- ja luonnollinen kieli kulkevat ongelman ratkaisussa rinnakkain, ja luonnollisella kielellä selitetään symbolikielen käyttöä, puhutaan kommenttimallista. Päiväkirjamallissa oppilas selittää symbolikieltä sanallisesti tai kuviota käyttäen, jos hän kohtaa ongelmia ratkaistessa tehtävää.

Kirjallisen matemaattisen ongelmanratkaisun jälkeen on tärkeää, että oppilas palaa vielä tehtävässä asetettuun kysymykseen. Lukiessaan kysymyksen uudestaan oppilaan on helpompi antaa vastaus oikeassa yksikössä (esimerkiksi metreinä tai

euroina) ja samalla arvioida vastauksen oikeellisuutta. Leppäaho (2018, s. 373) viittaa Pólyaan (1948), joka on esittänyt nelivaiheisen matemaattisen ongelmanratkaisumallin. Ensimmäiseksi ongelma tulee ymmärtää, minkä jälkeen täytyy tehdä suunnitelma sen ratkaisemiseksi. Kolmannessa vaiheessa suunnitelma tulee toteuttaa ja viimeiseksi täytyy vielä luoda katsaus toteutettuun ratkaisuprosessiin ja arvioida ratkaisun oikeellisuutta. Kirjallinen kielentäminen tarjoaa tähän oivan työkalun ja antaa opettajalle mahdollisuuden arvioida oppilaan matemaattista ajattelua. Tässä kokeilussa keskitytään edellä esitetystä neljän kielen mallista luonnolliseen kieleen ja matematiikan symbolikieleen sekä piirroksiin kuviokielellä.

3 Tutkimustehtävä

Tämän artikkelin tarkoituksena on tarkastella kuudennen luokan oppilaiden (n=35) tuottamia kirjallisia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Tutkimuksessa haetaan vastauksia kysymykseen:

Millaisia kielentämisen tapoja oppilaat käyttävät kuvatessaan kirjallisesti kahden sanallisen ongelmaratkaisutehtävän ratkaisuja?

3.1 Tutkimuksen osallistujat ja tutkimusaineiston keruu

Tutkimukseen osallistui kaksi kuudetta luokkaa (n=35) eräästä länsisuomalaisesta koulusta. Tutkimusaineistona olivat oppilaiden kirjalliset ratkaisut kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Oppilaille esitetyt tehtävät oli valittu Jorma Joutsenlahden harjoitusmonisteesta *Omin sanoin matematiikan maailmassa* vuodelta 2016. Joutsenlahden tehtävät ovat kaikki ongelmanratkaisutehtäviä, joissa oppilaan tulee käyttää kielentämistä (muun muassa sanallisia selityksiä) tehtävien ratkaisuisissa. Tutkimustehtävinä oppilaille esitettiin edellä mainitusta harjoitusmonisteesta tehtävät 7 ja 10 (ks. kuva 1).

7 a) Laadi oheisesta kuvasta kanamunien lukumäärään liittyvä tehtävä, jonka ratkaisussa voit käyttää kertolaskuja.

b) Laadi oheisesta kuvasta kanamunien lukumäärään liittyvä tehtävä, jonka ratkaisussa voit käyttää jakolaskuja (ositus- tai sisältöjako).

c) Kirjoita kaverille molemmista laskuista, miten ratkaisit ne. Kerro vielä eri vaiheet, miten päädyit vastaukseen.



10. a) Ratkaise tehtävä.

b) Kirjoita kaverille, miten ratkaisit tehtävän. Kerro eri vaiheet, miten päädyit vastaukseen. Voit myös piirtää tarvittaessa.

Tehtävä: Luokasta lähtee pois puolet oppilaista. Vähän ajan päästä jäljelle jääneistä oppilaista poistuu kolmasosa. Luokkaan jää edelleen 8 oppilasta. Kuinka monta heitä alun perin oli?

Kuva 1. Sanalliset ongelmanratkaisutehtävät 7 ja 10 (Joutsenlahti, 2016a)

Tehtävä 7 on luonteeltaan avoin ongelmanratkaisutehtävä. Mainitussa tehtävässä on kuva (ks. kuva 3), jossa kanamunakennot ovat hyvässä järjestyksessä viidellä päällekkäin olevalla hyllyllä. Oppilaille annettiin vain alkuasetelma, jonka pohjalta oppilaiden tuli laatia tehtävänsä. Oppilaiden tuli laatia tehtävien ohjeistuksen mukaisesti annetusta kuvasta sanallisia tehtäviä (tehtävät 7a ja 7b) ja kuvata omaa matemaattista ajatteluaan tehtävien ratkaisussa (tehtävä 7c) (ks. kuva 1).

Tehtävässä 10 (ks. kuva 3) oppilaiden tuli ratkaista seuraava tehtävä: ”Luokasta lähtee pois puolet oppilaista. Vähän ajan päästä jäljelle jääneistä oppilaista poistuu kolmasosa. Luokkaan jää edelleen 8 oppilasta. Kuinka monta heitä alun perin oli?” Samoin kuin tehtävän 7 kohdassa c ja tehtävän 10 kohdassa b pyydettiin oppilaita kirjoittamaan kaverille, kuinka he olivat itselaatimansa tehtävän ratkaisseet. Myös ratkaisujen eri vaiheet tuli selittää. Tämän tehtävän 10b ratkaisuprosessin kuvauksessa oppilaita kehoitettiin käyttämään tarvittaessa myös piirtämistä. Näin oppilaiden tuli molemmissa tehtävissä tehdä matemaattinen ajattelu näkyväksi kielentämisen keinoin. Ratkaisut osoittautuivat varsin mielenkiintoisiksi kielentämisen näkökulmasta.

Sekä tehtävät 7a ja 7b että tehtävien 7c ja 10 b ratkaisuprosessien kuvaukset ovat luonteeltaan avoimia ongelmanratkaisuprosesseja. Jokaisen oppilaan tuli luoda itsenäisesti, ilman valmista mallia, oman näköisensä tehtävä (tehtävät 7a ja 7b) sekä kuvaus tehtävien ratkaisuprosesseista joko piirtäen, kirjoittamalla ja symbolista kieltä käyttämällä tai käyttämällä vain joitakin edellä mainituista kielistä. Näissä tehtävissä oppilaat harjoittelivat niin ongelmanratkaisun kuin kielentämisenkin taitoja.

Tämänkaltaisia tehtäviä ei oppilailla juurikaan oppimateriaaleissa ole. Ahtee tutkimusryhmineen (2015) painottaa luovuutta ongelmanratkaisun keskeisenä tekijänä, ja tämä luovuuden näkökulma toteutuukin tehtävien 7 ja 10 lähtökohdissa. Ongelmanratkaisu voidaan nähdä matematiikan opetuksen ytimenä ja oppilaille tulisi tarjota juuri ongelmanratkaisun keinoin kehittää keksimiskykyään ja luovaa ajatteluaan. Matematiikan opetusta voidaan tehostaa avoimien tehtävien käytöllä, ja juuri ne tarjoavat oppilaalle mahdollisuuden käyttää luovuuttaan. Avoimissa tehtävissä on useimmiten erilaisia ratkaisuja ja ratkaisumahdollisuuksia, jotka ovat riippuvaisia oppilaan tekemistä valinnoista. Esimerkiksi tehtävien 7 ja 10 ratkaisuprosessien kuvauksissa oppilaat joutuivat tekemään valintoja siitä, millä tavoin kuvaavat tehtävien ratkaisuprosesseja. Kielentämisen pedagogiikka tukee hyvin ongelmanratkaisun luovuutta ja antaa oppilaille keinoja ratkaisuprosessien kuvaamiseen.

3.2 Tutkimusaineiston analyysi

Tehtävien ratkaisut analysoitiin teoriapohjaisen sisällönanalyysin (Tuomi & Sarajärvi, 2018) keinoin. Tehtävien 7 ja 10 ratkaisuja luokiteltiin Joutsenlahden (2009) esittämän viiden kirjallisen kielentämisen mallin pohjalta, jolloin kirjallisen kielen ratkaisumallit toimivat tutkimuksen teoriapohjaisena luokittelurunkona. Oppilaiden tuottamista sanallisista ratkaisuista tehtävään 7 hyväksyttiin sanallisiksi tehtäväksi myös kuvasta tehty kysymys. Näitä tehtäviä voidaan nimittää minisanallisiksi tehtäviksi (Perkkilä, 1999). Perusteluna edellä mainittuun on se, että voidakseen tuottaa annettujen ehtojen mukaisen ratkaisun, oppilaan on jo kysymystä tehdessään täytyntä oivaltaa arkisen kuvan ja matematiikan välinen yhteys. Tämän yhteyden oppilas on sanallistanut tehdessään kysymystä.

Analysoitavaksi valittujen ongelmanratkaisutehtävien 7 ja 10 vastaukset analysoitiin tehtäväkohtaisesti. Luokittelussa ei huomioitu, oliko oppilas ratkaisut kyseisen tehtävän oikein vai väärin. Kaikki tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat tuottaneet ratkaisun tehtävään 7, mutta tehtävän 10 jätti ratkaisematta 11 oppilasta (31,4 %) kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista (n=35). Molempien tehtävien

analysoinnissa tuloksissa olevat prosenttiluvut on laskettu siten, että käytettyä kirjallisen kielentämisen mallia on verrattu kaikkiin annettuihin vastuksiin. Huomiotta on siis jätetty niiden oppilaiden tehtäväpaperit, jotka eivät olleet lainkaan ratkaisseet kyseistä tehtävää.

4 Tutkimuksen tulokset

Analyysin tuloksista voidaan nähdä, että oppilailla on taitoja kielentää matemaattista ajatteluaan. Seuraavaksi esitetään tehtävien 7 ja 10 tulokset erikseen. Tuloksissa kuvataan oppilaiden antamien ratkaisujen jakautumista kirjallisten kielentämisen mallien kesken.

4.1 Tehtävän 7 tulokset

Taulukossa 1 on esitetty kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen sekä määrällinen jakautuminen tehtävässä 7.

Taulukko 1. Kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen jakautuminen oppilaiden ratkaisuisa tehtävässä 7

Kirjallisen kielentämisen malli	Oppilaiden ratkaisut tehtävään	Oppilaiden ratkaisut tehtävään 7
	7 (%)	(n=35)
Standardimalli	25,7 %	9
Kertomusmalli	25,7 %	9
Tiekarttamalli	8,6 %	3
Kommenttimalli	37,1 %	13
Päiväkirjamalli	2,9 %	1

Kirjallisen kielentämisen standardimallia ongelmanratkaisutehtävän 7 ratkaisussa oli käyttänyt yhdeksän (25,7 %) oppilasta. Kertomusmallin mukaista ratkaisutapaa esiintyi myös yhdeksällä oppilaalla. Tiekarttamallin mukaista ratkaisutapaa oli käyttänyt vain kolme oppilasta (8,6 %). Kommenttimallin käyttö näytti luontaisimmalta tavalta, sillä edellä mainittua mallin mukaista ratkaisutapaa oli käyttänyt 13 oppilasta (37,1 %). Ainoastaan yksi oppilas oli käyttänyt päiväkirjamallia tehtävän 7 ratkaisemisessa. Näissä tuloksissa ovat mukana kaikkien oppilaiden vastaukset huolimatta siitä, oliko oppilaan antama ratkaisu tehtävään oikea vai väärä. Seuraavassa taulukossa 2 on kuvattu oppilaiden laatimien sanallisten tehtävien, oikein

ratkaistujen tehtävien ja oppilaiden omien ajatteluprosessien sanallistamisen määriä prosentteina ja oppilasmäärinä.

Taulukko 2. Tehtävään 7 liittyvien sanallisten tehtävien tuottaminen, tehtävän oikeat ratkaisut, omien ajatteluprosessien sanallistamisen määrät prosentteina

Tehtävä 7	Oppilaiden ratkaisujen määrät (%)	Oppilaiden ratkaisujen määrät (n=35)
Oppilas laatinut sanallisen tehtävän	45,7 %	16
Oppilas ratkaissut tehtävän oikein	34,3 %	12
Oman ajatusprosessin kielentäminen	62,9 %	22

Kaikkiaan 16 oppilasta (45,7 %) oli laatinut sanallisen tehtävän tehtävään 7. Kananmunakennojen oikean lukumäärän oli selvittänyt 12 oppilasta, joka on 34,3 % tutkimukseen osallistuneista oppilaista (n=35). Oppilaista 22 (62,9 %) oli osannut kirjoittaa ajatusprosessinsa kirjallisesti näkyville tehtävän 7 ratkaisun kulusta.

4.2 Tehtävän 10 tulokset

Tehtävän 10 tuloksissa ovat mukana kaikki ratkaisun antaneiden oppilaiden vastaukset huolimatta siitä, oliko ratkaisu oikea vai väärä (ks. taulukko 3). Tehtävään 10 antoi vastauksen 34 oppilasta. Taulukossa 3 vastausten jakautuminen kirjallisen kielentämisen mallien mukaisesti on laskettu tehtävään vastauksen antaneiden kokonaismäärästä (n=34). *Standardimallia* kirjallisen kielentämisen mallia oli käyttänyt viisi (14,7 %) kaikista tehtävään 10 vastanneista oppilaista. *Kertomusmallin* käyttöön oli päätyneet kuusi oppilasta (17,6 %). *Tiekarttamallia* käytti kahdeksan (23,5 %) oppilasta kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista. Kirjallisen kielentämisen *kommenttimallin* mukaisen vastauksen oli antanut viisi (14,7 %) oppilasta.

Taulukko 3. Kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen jakautuminen tehtävässä 10

Kirjallisen kielentämisen malli	Oppilaiden ratkaisut tehtävään (%)	Oppilaiden ratkaisut tehtävään (n=34)
Standardimalli	14,7 %	5
Kertomusmalli	17,6 %	6
Tiekarttamalli	23,5 %	8
Kommenttimalli	14,7 %	5
Päiväkirjamalli	-	-

Seuraavassa taulukossa 4 on havainnollistettu prosentteina ja oppilasmäärinä oikein ratkaistujen tehtävien ja omaa ajatteluprosessia sanallistaneiden määrät tehtävään 10 vastanneiden joukosta.

Taulukko 4. Tehtävään 10 oikeiden ratkaisujen ja tehtävän ratkaisuprosessissa omaa ajatteluaan sanallistaneiden määrät prosentteina

Tehtävä 10	Oppilaiden ratkaisujen määrät (%)	Oppilaiden ratkaisujen määrät (n=35)
Oppilas ratkaissut tehtävän oikein	42,9 %	15
Omaa ajatusprosessia kielentänyt	48,6 %	17

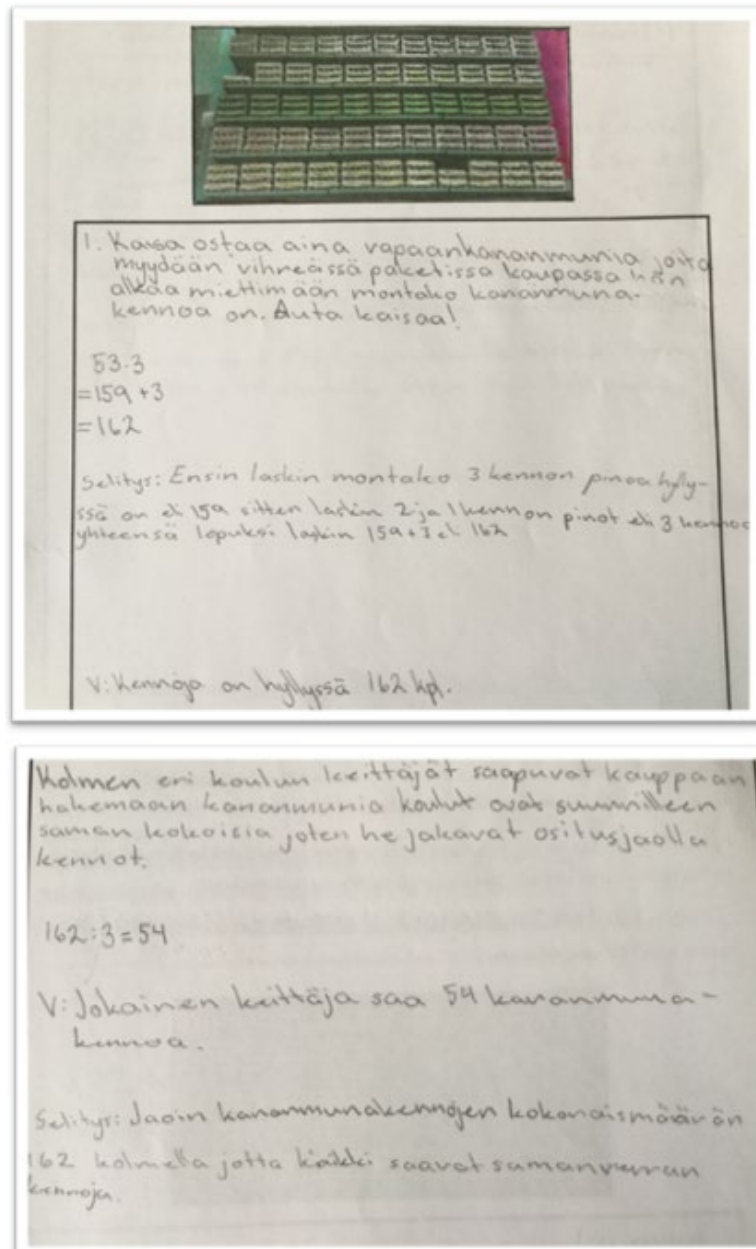
Tutkimukseen osallistuneista (n=35) 15 oppilasta oli ratkaissut tehtävän oikein, mikä on 42,9 % kaikista oppilaista. Omaa ratkaisuaan sanallisesti, kuvallisesti tai sanallisesti ja kuvallisesti oli selittänyt 17 oppilasta (48,6 %). Yksi oikean vastauksen antaneista oppilaista oli käyttänyt standardimallia ja kolme oppilasta, jotka olivat selittäneet omaa ajatteluaan, oli päätenyt väärään ratkaisuun.

4.3 Tehtävien ratkaisujen tarkastelua

Tehtävän 7 ratkaisussa erottui selkeimmin kommenttimallin käyttö (37,1 % tutkimukseen osallistuneista). Tehtävän 10 kohdalla kommenttimalli ei erottunut niin selkeästi, sillä vain 14,3 % tutkimukseen osallistuneista käytti kommenttimallia tehtävän 10 ratkaisussa. Tämän mallin käyttö lienee oppilaille luontaista, koska kommenttimallissa matematiikan symbolikieli ja luonnollinen kieli kulkevat ongelman ratkaisussa rinnakkain ja luonnollisella kielellä selitetään symbolikielen käyttöä (Joutsenlahti, 2009).

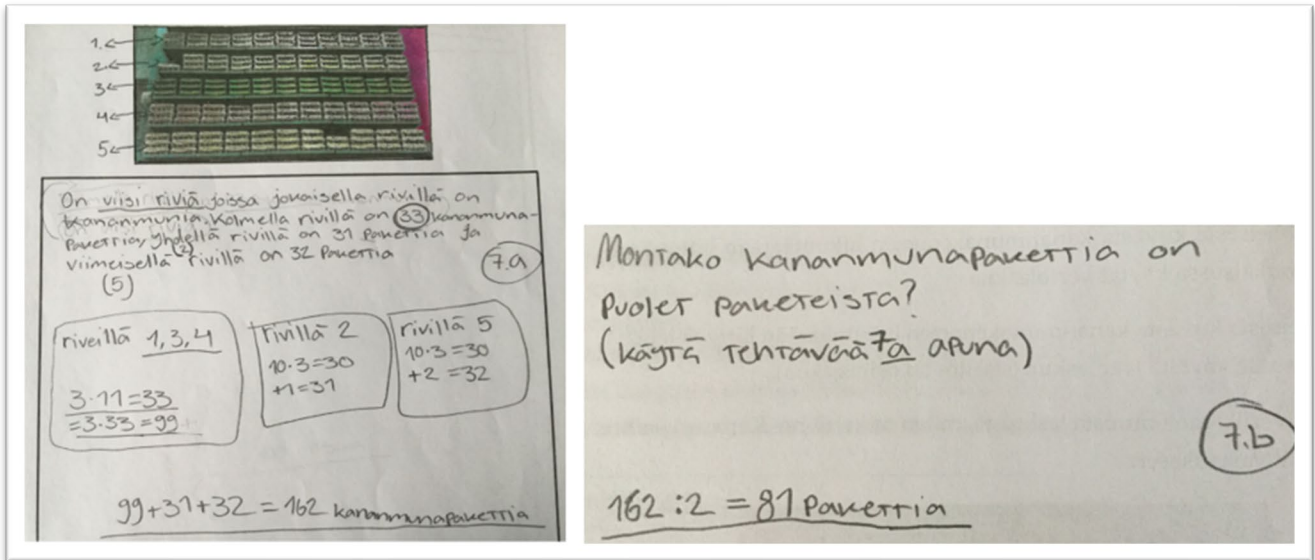
Tehtävässä 7 erottui standardimallin käyttö toiseksi suosituimpana tapana esittää ratkaisu (ks. taulukko 1). Standardimallin käyttö perustuu matematiikan symbolikielen käyttöön (Joutsenlahti, 2009). Niin sanotussa perinteisessä matematiikan opetuksessa matematiikan oppikirjat ovat usein rakenteeltaan esimerkkitehtävissä standardimallin mukaisia. Tästä johtunee, että oppilaiden luontainen tapa työskennellä matematiikan parissa muotoutuu pitkälti symbolikielen mukaiseksi ilmaisuksi.

Kuvassa 2 on esitetty oppilaan (oppilas 7) esittämät kerto- ja jakolaskut sekä tehtävien ratkaisuprosessien kielentämiset.



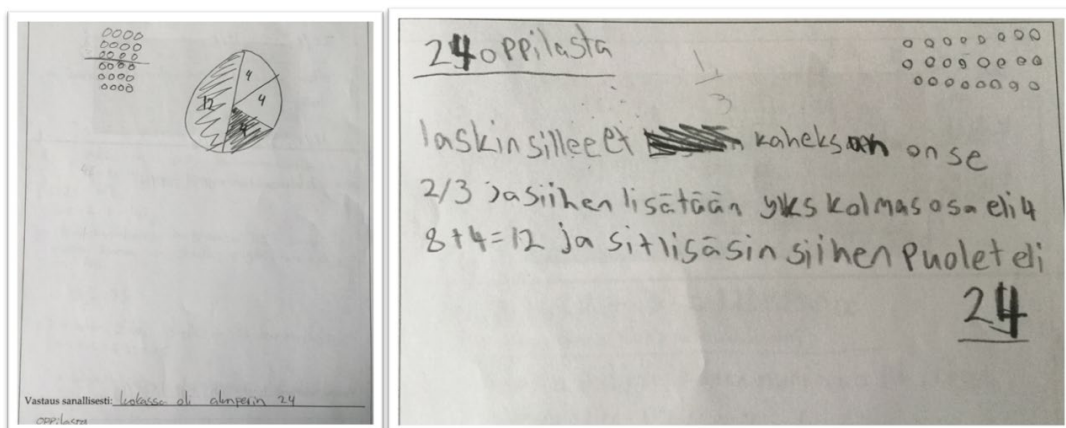
Kuva 2. Oppilaan (oppilas 7) esittämät kerto- ja jakolaskut tehtävästä 7 sekä laadittujen tehtävien ratkaisuprosessien kuvaukset

Tarkasteltaessa analyysissa mukana olleiden tehtävien vastauksia osa oppilaista oli selvästi oppinut käyttämään luonnollista kieltä tehtävien laatimisprosesseissa sekä oppinut kuvaamaan ajattelunsa etenemistä tehtävän ratkaisuprosessissa. Oppilaiden keksimissä sanallisissa tehtävissä tuli esiin myös vastauksia, joissa oppilaat rinnastavat arkipäivän tilanteita matematiikkaan. Seuraavassa kuvassa 3 on esitetty tutkimukseen osallistuneen oppilaan (oppilas 7) laatimat kerto- että jakolaskut tehtävään 7 sekä itse laadittujen tehtävien ratkaisuprosessien kuvaukset. Kuvassa 3 on esimerkki (oppilas 1) standardimallin mukaisesta ratkaisusta tehtävään 7. Kuvassa esitetty vasemmalla tehtävään 7a kertolasku ja oikealla jakolasku tehtävään 7b.



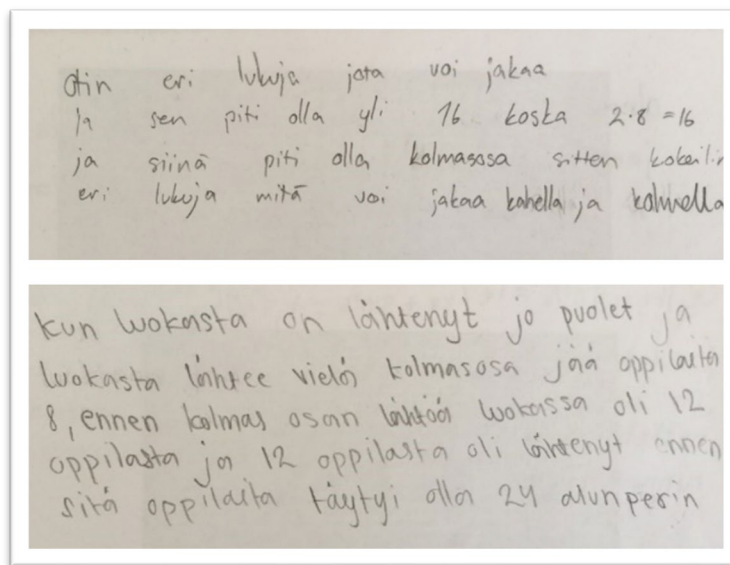
Kuva 3. Oppilaan (oppilas 1) standardimallin mukaiset ratkaisut kerto- ja jakolaskusta tehtävään 7

Tehtävässä 10 oppilaat olivat käyttäneet kuviokieltä apunaan tehdessään ratkaisua. Kuviokieltä ratkaisun tukena oli käyttänyt kaikkiaan 7 (20,0 %) tutkimukseen osallistuneista oppilaista ($n=35$). Oppilaiden käyttämä kuviokieli ilmeni osaksi piirrettyjen ympyröiden jonona tai vailla ilman selkeää piirrettyjen ympyröiden ryhmittelyä. Osalla oppilaista selkeä piirrettyjen ympyröiden ryhmittely ja niin sanottujen piirakkamallien käyttö näyttäytyi ilmiselvästi oman matemaattisen ajattelun esille tuomisen välineenä. Edellä mainittu saattaa johtua siitä, että oppilaita on ohjattu tuomaan matemaattista ajatteluaan esille myös kuviokielellä matematiikan oppimistilanteissa. Kuvassa 4 vasemmalla on esitetty oppilaan (oppilas 12) ratkaisu tehtävään 10 kuviokieltä käyttäen. Kuvassa 4 oikealla on tehtävän 10 ratkaisuprosessin selitys sekä kuviokielellä että sanallisesti (oppilas 14).



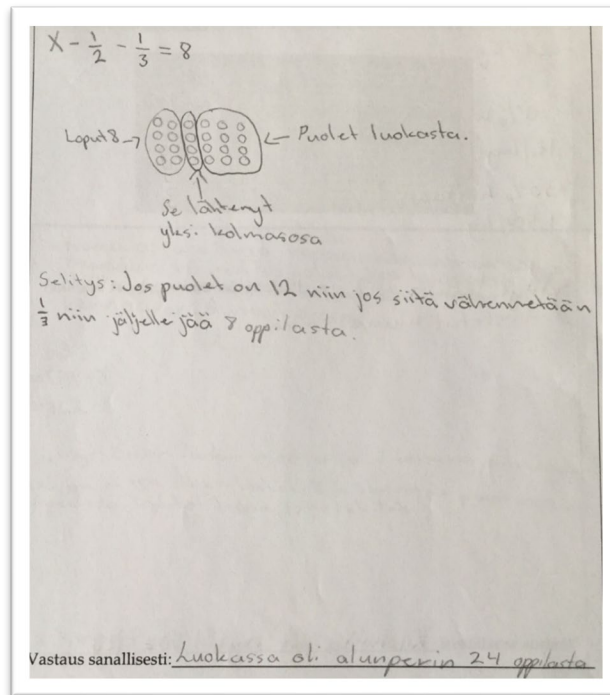
Kuva 4. Vasemmalla oppilaan esittämä ratkaisu (oppilas 12) tehtävään 10 kuviokielellä ja oikealla oppilaan (oppilas 14) ratkaisu sekä kuviokielellä että luonnollisella kielellä

Analysoiduissa tehtävissä oli mukana myös ratkaisuja, joissa oli käytetty hyväksi vain pelkkää päättelyä. Tällä tavalla ratkaistuja tehtäviä löytyi kaksi kappaletta. Eräs oppilas (oppilas 11) selitti tehtävän 10 ratkaisuaan näin (ks. kuva 5): ”Otin eri lukuja, joita voi jakaa ja sen piti olla yli 16, koska $2 \cdot 8 = 16$ ja siinä piti olla kolmasosa. Sitten kokeilin eri lukuja mitä voi jakaa kahdella ja kolmella.” Vastaukseksi hän oli kirjoittanut: ”Aluksi oli 24.” Toiselta oppilaalta (oppilas 5) löytyi tehtävään 10 seuraavanlainen ajatus (ks. kuva 5): ”Kun luokasta on lähtenyt jo puolet ja luokasta lähtee vielä kolmasosa, jää oppilaita 8. Ennen kolmasosan lähtöä luokassa oli 12 oppilasta ja 12 oppilasta oli lähtenyt ennen sitä. Oppilaita täytyi olla 24 alun perin.”



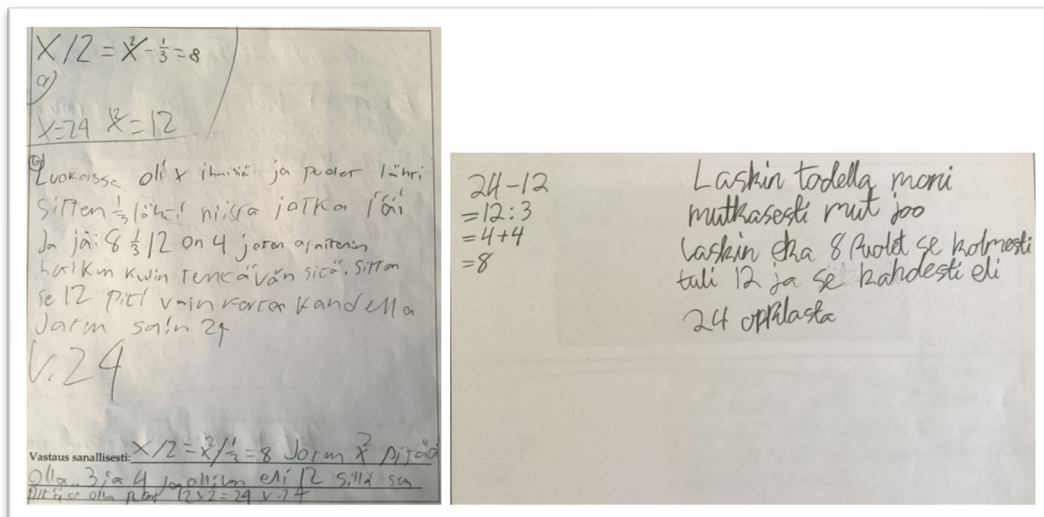
Kuva 5. Oppilaiden (oppilaan 11 ylempänä ja oppilaan 5 alempana) esittämät tehtävän 10 ratkaisut päättelyn avulla

Oppilaiden esittämissä vastauksissa oli mukana sellaisia, joissa oli perusteltu tehtävän vaativaa matemaattista ajattelua monipuolisesti kielentämisen keinoin. Seuraavassa kuvassa 6 on esitetty oppilaan (oppilas 7) tehtävän 7 ratkaisu, jossa hän oli muodostanut ratkaisemiseksi lausekkeen, kuvion ja sanallisen selityksen.



Kuva 6. Oppilaan (oppilas 7) ratkaisu tehtävään 7. Ratkaisussa esitetty lauseke, selitys sekä kuva.

Tehtävään 10 löytyi myös hieman muiden ratkaisuista poikkeavia ratkaisuja. Seuraavassa kuvassa 7 on esimerkkinä poikkeavista ratkaisuista kahden oppilaan (oppilaat 3 ja 4) ratkaisut tehtävään 10.



Kuva 7. Esimerkit (oppilaat 3 ja 4) poikkeavista ratkaisuista tehtävään 10

Joissakin oppilaiden ratkaisussa oppilaiden tuottama matemaattisen ajattelun ilmaisu jäi melko ohueksi. Edellä mainituissa ratkaisuissa näkyi mahdollisesti niin sanottu perinteinen oppikirjan mukainen eteneminen ja oppikirjan tehtäviä painottava opetus. Erityisesti tämä tuli esille oppilaiden ajattelun ilmaisuissa matematiikan

symbolikielissä esityksissä ja standardimallin käytössä. Tehtävien ratkaisuihin oli nähtävissä myös se, että ne oppilaat, joiden opetuksessa oli mahdollisesti käytetty oppimismateriaalia, ja joita oli rohkaistu ilmaisemaan ajatteluaan monipuolisesti puhuen, välinein, piirtäen ja symbolisesti, toivat ajatteluaan esille jonkin verran rohkeammin ja monipuolisemmin.

5 Pohdinta

Tässä tutkimuksessa olleiden tehtävien pohjalta esiin nousi vahvasti oppilaiden taito kielentää omaa matemaattista ymmärtämistään. Tehdyn tutkimuksen mukaan vaikuttaisi siltä, että oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmaisemista tukeva opetus rikastaa matemaattisen ajattelun kielentämisen taitoja ja oppilaat löytävät mieluisia tapoja ilmaista itseään. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista tukeva pedagogiikka luo valmiuksia oppilaille tuoda esiin luonnollisen kielen, tässä tapauksessa kirjoitetun kielen avulla, omaa matemaattista ymmärtämystä. Kun luonnollinen kieli on osa opetusta, niin se kehittää lapsen matemaattista ajattelua.

Luokassa oleva salliva ja ymmärtäväinen ilmapiiri mahdollistaa oppilaiden ilmaisemaan vapaasti tehtävistään saamiaan ratkaisuja. Näin opetukseen sisältyy paljon opettajan ja oppilaiden kuin myös oppilaiden keskinäistä keskustelua ja joskus jopa väittelyä. Kun oppilas puhuu matematiikkaa, hänen on täytynyt ensin prosessoida oma ajatus itselleen ymmärrettäväksi. Opettajan kuunnellessa oppilaan puhetta hänellä on mahdollisuus arvioida, onko oppilaalla oikea käsitys käsiteltävästä asiasta. Tämä helpottaa opettajaa arvioinnissa. Vielä tärkeämpää on kenties se, että opettajan on mahdollisuus heti auttaa oppilasta, jos oppilaalle on tullut väärä ymmärrys opetetavasta asiasta. Vähäistä ei myöskään ole se, että toisen oppilaan käyttämä puhe voi joskus auttaa myös luokkakaveria ymmärtämään asiaa paremmin kuin opettajan tuottama puhe.

Analysoiduissa tehtävissä nousi useista tehtäväpapereista esiin sana *miinustaa*. Matematiikan oppimisen tulisi edetä systemaattisesti, hierarkkisesti ja loogisesti eteenpäin, mihin kuuluu vähitellen myös mukaan tuleva täsmällinen matemaattisten käsitteiden ilmaisu. Oppimisen edistyminen edellyttää jo vakiintuneen terminologian omaksumista, joten opettajan tehtävänä kielentämisessä on tukea myös oppijoiden matemaattisen kielenkäytön kehittymistä (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Näin kuudennella luokalla oppilaiden tulisi käyttää peruslaskutoimituksiin perustuvissa

tehtävissä täsmällistä ilmaisua. Esimerkiksi vähennyslaskua tehdessään oppilaiden tulisi käyttää vähentämisen prosessista ilmaisua *vähentää*. Kun luokassa käytetään luonnollista kieltä opiskeltaessa matemaattisia käsitteitä, opettajan on helppo puuttua myös oppilaiden käyttämään epätäsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun. Matematiikan abstraktin luonteen takia erityisesti matemaattisten käsitteiden opetuksessa erilaisten variaatioiden tuottamisessa ja tarkastelemisessa on huolellisella kielenkäytöllä suuri merkitys.

Joidenkin oppilaiden ratkaisuisissa painottuivat standardimallin mukaiset ratkaisut. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan ne ovatkin peruskoulun oppikirjoissa tyypillisiä ja perustuvat matematiikan symbolikielen käyttämiseen. Erityisesti tätä mallia käytetään aritmetiikan tehtävissä. Perinteissä matematiikan opetuksessa olleet oppilaat olivat mahdollisesti tottuneet symbolikielen mukaiseen ratkaisun esittämisen malliin.

Viitteitä perinteiseen opetukseen liittyvästä matematiikan oppikirjaan sitoutuvasta opetuksen toteutustavasta Suomessa ovat tuoneet esille muun muassa Perkkilä (2002), Joutsenlahti ja Vainionpää (2010) sekä Lepik ym. (2015) ja Viholainen ym. (2015). Tutkijoiden mukaan edellä mainittu näkyy siten, että opetuksen suunnittelu ja toteutus perustuvat pääasiassa oppikirjojen ratkaisuihin. Oppikirjaan sitoutuvassa opetuksessa oppilaat tottuvat nopeasti niihin matemaattisten ratkaisumallien tapoihin, joita oppikirjassa esitetään ja joita opetuksessa noudatetaan. Matematiikan oppikirjoihin sitoutuva opetus rajaa oppilaan ajattelun kehittymistä. Oppikirjaan sitoutuvan opetuksen seurauksena voi olla myös se, että helposti tehtävän vastauksesta tulee tärkein asia. Luullaan, että tehtävään on olemassa vain yksi ratkaisu ja se on oppikirjan tekijän esittämä malliratkaisu. Oma ajattelua ei uskalleta tuoda esille, koska oppilas saattaa uskoa, että vain malliratkaisun mukainen ratkaisu on ainoa oikea.

Oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmaisulle olisi hyvä antaa tilaa taktiilisen, kuviokielen, luonnollisen kielen sekä matematiikan symbolisen avulla. Näin oppilaat voivat vähitellen rakentaa matemaattista ymmärrystään yhdessä toisten vertaisten kanssa (vrt. kielentäminen). Matematiikkaa opettavien opettajien koulumuistoissa usein matematiikan opetus on rakentunut pitkälti oppimateriaalin varaan (vrt. Perkkilä, 2002). Oppikirjaan sitoutuva opetuksen malli on monelle opettajalle se tutuin ja helpoin malli opettaa. Tässä mallissa jää kuitenkin oppilaan omakohtaisen ajattelun merkitys vähemmälle. Opettajat tarvitsevat tukea monipuoliseen matematiikan opetukseen. Erityisesti tulisi tukea sitä, että opettajilla olisi koulutuksissa tilaisuuksia saada omakohtaisia kokemuksia kielentämisen monipuolisista mahdollisuuksista.

Omakohaisten oivallusten kautta opettajat syventäisivät näkemystään kielentämisen merkityksestä käsitteiden ymmärtävään oppimiseen perustuvassa matemaattisen ajattelun kehittämisessä. Näin vähitellen opettajat voisivat tuoda omien kokemustensa pohjalta monipuolisempia työskentelytapoja matematiikan oppimisympäristöihin. Valtakunnallisessa LUMATIKKA-hankkeessa onkin vastattu edellä mainittuun opettajien tuen tarpeeseen järjestämällä koulutusta, joissa on ollut tavoitteena tarjota avaimia monipuolisen matematiikan opetuksen suunnitteluun ja toteutukseen.

Nykyinen voimassa oleva opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2014) ohjaa vahvasti siihen, että oppilaiden tulisi itse osata löytää kehittymisensä ja oppimisensa kohteita opiskeltavasta asiasta. Murata (2004) on tutkinut yhteenlaskustrategian kehitystä ensimmäisen luokan aikana. Hänen tutkimuksensa mukaan uutta strategiaa yhteenlaskussa ei opittu automaattisesti, vaan nimenomaan opettajan ohjauksen avulla ja opettajan ohjaamalla tavalla. Opettajan ohjaus oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä toimi tässä oppilaan ajattelun kehittämisen välineenä kohti abstraktiota.

Nykyisessä opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) painotetaan monipuolista matemaattista ilmaisua: puhuen, konkretian avulla, piirtäen ja symbolisesti. Konkretialla tarkoitetaan oppimisvälineiden monipuolista käyttöä. Toimintavälineet tukevat oppilaan induktiivista oppimista, jonka tavoitteena on monien yksittäisten kokemusten yleistäminen. Näin välineet ovat käsitteenmuodostuksen ja ajattelun välineitä. Tikkasen (2008) mukaan tavoitteena on edistää opittavan käsitteen abstrahoitumista ilman konkreettisia oppimisvälineitä. Oppilas tarvitsee juuri tämän matemaattisen ajattelun abstrahoitumisen esiin tuomisessa luonnollista kieltä. Pelkällä symbolisen kielen käytöllä opettaja ei voi saada selville oppilaan ajatusta ja ymmärrystä. Kun Jorma Joutsenlahti (2016b) koulutti opettajia Oulaisissa matematiikan tehtävien kielentämisestä sanallisesti, niin hän sanoi: ”Vain silloin, kun lapsi puhuu matematiikka, voit olla varma, että hän myös ajattelee matematiikkaa.” Tällä ilmaisuella hän halusi tuoda esille sanallistamisen tärkeyttä omin sanoin luonnollisella kielellä matematiikan oppimisessa.

Lähteet

- Ahtee, M., Hannula, M., Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E. & Portaankorva-Koivisto, P. (2016). Esipuhe. Teoksessa S. Wass (toim.) *Iloa ongelmanratkaisuun* (s. 4–6). Otava.
- Joutsenlahti, J. (2016a). *Omin sanoin matematiikan maailmassa*. Julkaisematon kielentämisen harjoitusmoniste. Tampereen yliopisto.
- Joutsenlahti, J. (2016b). *Tehtävien kielentäminen sanallisesti*. [Suullinen esitys]. Koulutus Oulaisissa 14.10.2016.
- Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2009* (Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9, s. 71–86). Lapin yliopisto.
- Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.), *Opettaja asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktiikan symposium 7.2.2003* (Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, s. 188–196). Turun yliopisto.
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.
- Joutsenlahti, J., Perkkilä, P., & Tossavainen, T. (2017). Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. *FMSERA Journal*, 1(1), 99–109.
<https://journal.fi/fmsera/article/view/60904> Luettu 19.3.2020. Viitattu 26.3.20
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2015). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.), *Monilukutaito kaikki kaikessa* (s. 57–76). Tampereen yliopiston normaalikoulu. <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/98047> Viitattu 26.3.20
- Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.), *Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014* (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8, s. 45–62). Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/153212>
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Niemi, E. K. & Metsämuuronen, J. (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 137–148). Opetushallitus.
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers’ view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 129–156.
- Leppäaho, H. (2018). Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 368–392). Niilo Mäki Instituutti.
- Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.) *Issues in mathematics teaching* (s. 232–244). Routledge Falmer.
- Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understandings of teen sums: Addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction*, 22, 185–218.
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Määräykset ja ohjeet 96. Opetushallitus.
- Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa* [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto].
<https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/42025>
- Perkkilä, P. (1999). *Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjan didaktinen analyysi*. [Lisensiaatintyö, Jyväskylän yliopisto].

- Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V.-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 344–367). Niilo Mäki Instituutti.
- Pólya, G. (1948). *How to solve it? A new aspect of mathematical method*. (5. painos). Princeton University Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–44.
- Tikkanen, P. (2008). ”Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin”. *Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana* [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18042>
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Tammi.
- Viholainen, A., Partanen, M., Piironen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 157–178.