

# Yhtälönratkaisun oppiminen teknologisen toimintamateriaalin ja kielentämisen avulla

Daranee Lehtonen<sup>1, 2</sup> ja Jorma Joutsenlahti<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta, Tampereen yliopisto

<sup>2</sup> Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Tampereen yliopisto

**Tiivistelmä:** Kirjallisuuden ja aikaisempien tutkimusten mukaan perinteisesti koulumatematiikan opetuksessa painotettu proseduraalinen osaaminen ei yksinään riitä matematiikan oppimisen onnistumiseen. Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet painottavat oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärryksen merkitystä. Tässä artikkelissa esitellään Lehtosen väitöstutkimus esimerkkinä, kuinka oppimisteknologian käyttö voi tukea alakoululaisten matemaattisten käsitteiden ymmärrystä. Väitöstutkimuksen aikana kehitettiin moniesitysmuotoinen oppimisväline alakoululaisten yhtälönratkaisun oppimista varten. Kehitetty oppimisväline yhdistää fyysisten ja digitaalisten välineiden vahvuudet: fyysisten osien liikkuminen saa oppilaat ajattelemaan omaa toimintaa, kun taas digitaaliset osat motivoivat oppilaita oppimaan sekä mahdollistavat reaaliaikaisen ohjauksen ja palautteen saamisen. Luokkakokeilussa osoitettiin, että kehitetyn oppimisvälineen käyttö yhdessä matemaattisen ajattelun kielentämisen mallin kanssa tuki neljäsluokkalaisten yhtälönratkaisun käsitteiden oppimista. Kehitetty toimintamateriaali toimi oppilaiden oppimisen, kommunikoinnin ja vuorovaikutuksen välineenä. Oppilaat pitivät kehitettyä välinettä oman oppimisen kannalta hyödyllisenä, helppokäyttöisenä ja miellyttävänä käyttäen. Lisäksi he kokivat tekemällä oppimisen ja yhteisöllisen kielentämisen mielekkääksi työtavaksi tulevaisuudessa matematiikan oppimiseen.

**Avainsanat:** matematiikan oppiminen, käsitteellinen ymmärrys, toimintamateriaali, oppimisteknologia, kielentäminen

Yhteystiedot: [daranee.lehtonen@tuni.fi](mailto:daranee.lehtonen@tuni.fi)

## 1 Johdanto

Perinteisesti koulumatematiikan opetuksessa painotetaan oppilaiden proseduraalisen sujuvuuden kehittämistä. Kuitenkin kirjallisuus ja tutkimukset ovat osoittaneet, että *proseduraalinen osaaminen* (joustava, täsmällinen, tehokas ja tarkoituksenmukainen toimintojen suorittaminen) ei yksinään riitä matematiikan tavoitteiden mukaiseen oppimiseen (Kilpatrick ym., 2001; Schoenfeld, 2007). Kilpatrickin ja muiden (2001) mukaan matemaattinen osaaminen koostuu proseduraalisen sujuvuuden lisäksi useammasta muusta osa-alueesta, joista yksi keskeinen on *käsitteellinen ymmärrys* (matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen).



Matematiikan opetuksessa keskitytään usein sääntöihin ja niiden soveltamiseen eikä niiden ymmärrykseen perustuvaan oppimiseen (Bogomolny, 2007; Kilpatrick ym., 2001). Yhtälönratkaisu onkin yksi esimerkki näistä matematiikan sisältöalueista.

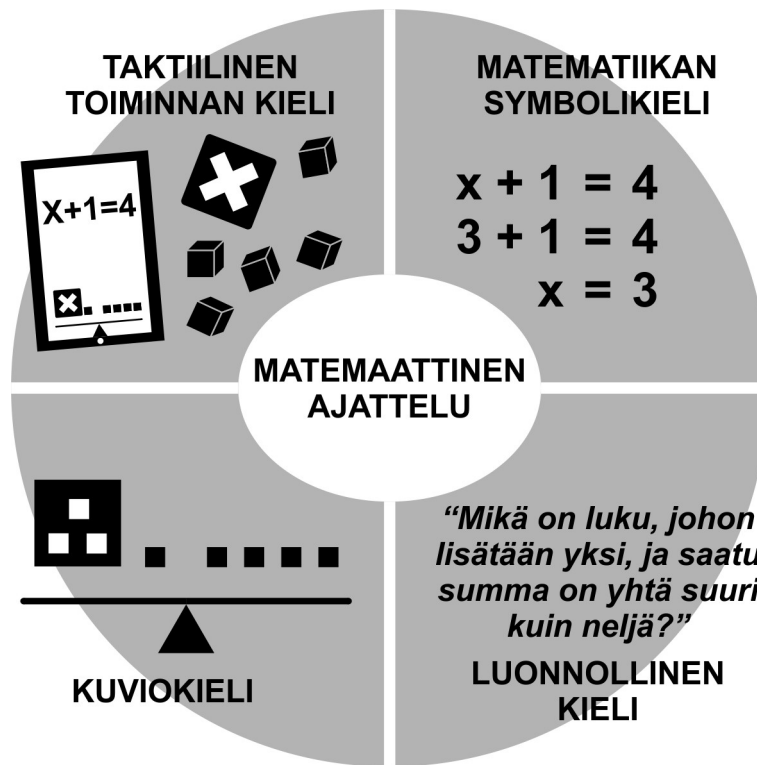
Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2015) painotetaan, että matematiikan opetuksen yhtenä tehtävänä on tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärrystä. Lisäksi korostetaan konkretian, toiminnallisuuden sekä tieto- ja viestintäteknologian keskeistä asemaa peruskoulun matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Opetuksessa oppilaita kannustetaan esittämään matemaattista ajatteluaan, päätelmiään ja ratkaisujaan kielentäen eli konkreettisilla välineillä, suullisesti, kirjallisesti, piirtäen sekä tieto- ja viestintäteknologialla. Algebra-sisältöalueen osalta tavoitteena on, että 3.–6. luokkien oppilaat tutustuvat tuntemattoman käsitteeseen, tutkivat yhtälöä sekä etsivät yhtälön ratkaisuja kokeilemalla ja pääättelemällä.

Artikkelin tarkoituksena on esitellä, kuinka teknologisen ja konkreettisen toimintamateriaalin käyttö kielentämisen avulla voi tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärtävää oppimista. Esimerkkinä käytetään Lehtosen (2022) väitöstutkimusta, jossa tutkittiin *multimodaalisen* eli moniesitysmuotoisen teknologisen ja konkreettisen välineen hyödyntämistä alakoululaisten yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa.

## 1.1 Kielentäminen matemaattisten käsitteiden oppimisessa

Perinteiseen koulumatematiikan opetukseen on kuulunut hiljainen työskentely ja oppilaiden muodollisesti täsmällisen ilmaisun vaatimus matematiikan tunneilla. Kummassakin näistä oppilaan oma ajattelu jää pimentoon opettajalta ja vertaisryhmältä. Vain merkitty suoritus ja lopputulos on nähtävissä tai kuultavissa. Tämä on eräs havainto, minkä pohjalta on lähdetty kehittämään matemaattisen ajattelun kielentämisen pedagogista mallia (Joutsenlahti 2003) matematiikan opetukseen alakoulusta yliopistotasolle asti.

Siinä missä matematiikan symbolikieli kattaa ilmaisun matemaattisin merkein, voidaan luonnollista kieltä ilmaista sanallisesti tai kirjoitettuna, kuviokieltä piirroksin ja taktiilista kieltä esimerkiksi toimintamateriaalien ja muun oman toiminnan myötä (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Kuviossa 1 on hahmoteltu, mitä nämä mainitut kielet voisivat olla yhtälönratkaisun oppimisessa.



Kuvio 1. Kielentäminen yhtälönratkaisun oppimisessa (sovellettu Joutsenlahti ja Rättyä, 2015, s. 52)

Aikaisempien tutkimusten mukaan kielentäminen tukee koko luokan toimintaa eli oppilasta, vertaisryhmää ja opettajaa (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Kielentäminen mahdollistaa oppilaalle ja myös opettajalle multimodaalisen ilmaisun ajattelulle, jossa kukin voi omin sanoin, piirroksin ja tekemällä näyttää omaa matemaattista ajatteluaan. Näin myös oppilas rakentaa samalla merkityksiä käsitteille ja liittää niitä aiemmin kokemaansa ja oppimaansa. Oppilaalle rakentuu ymmärrys opittavasta asiasta, eikä se ole vain muistinvarainen sääntökokoelma. Lisäksi opettaja voi arvioida ja ohjata oppilaita täsmällisemmin kunkin tarpeen mukaan. Vertaisryhmä ymmärtää usein paremmin toisten oppilaiden selityksiä kuin vain aikuisen opettajan. Vertaisryhmän kieli ja ilmaisut elävät ajassa. Kielentämisen avulla voidaan systemaattisesti rakentaa merkityksiä yksin ja ryhmässä sekä suullisesti että kirjallisesti uusista opittavista asioista. Tarkastelemme seuraavaksi kielentämistä ja toimintamateriaalin käyttöä yhtälönratkaisun opiskelussa.

## 1.2 Toimintamateriaalit matemaattisten käsitteiden oppimisvälineinä

Useiden oppimisteorioiden (mm. Bruner, 1966; Piaget, 1965) mukaan *toimintamateriaalit* eli toimintavälineet tai konkreettiset oppimisvälineet voivat auttaa oppilaita konkretisoimaan abstrakteja matemaattisia käsitteitä. Toimintamateriaaleita

käyttäessään oppilaat rakentavat opittavan asian ymmärrystä multimodaalisuuden (muun muassa taktiilisen toiminnan ja visuaalisten esitysten) kautta (McNeil & Jarvin, 2007; Moyer, 2001). Monissa maissa, Suomi mukaan lukien, opettajat pitävät toimintamateriaalien roolia merkittävänä matematiikan oppimisessa (esim. Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Juhola, 2018; Marshall & Swan, 2008; Ylä-Rautio, 2021).

Alakoulumatematiikan oppimisessa käytetään usein toimintamateriaaleja, kuten arjen esineitä (esimerkiksi noppia ja kolikoita) tai matematiikan oppimista varten suunniteltuja välineitä (esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineitä ja murtokakkuja). Viime aikoina myös digitaalisten toimintamateriaalien, kuten tablettisovellusten, käyttö on lisääntynyt matematiikan opiskelussa. Kuitenkin on huoli, että digitaaliset oppimisvälineet voivat aiheuttaa ongelmia oppimiselle (Magruder, 2012; Pires ym., 2019).

Aikaisempien tutkimusten mukaan toimintamateriaalit eivät itsessään tue oppimista, vaan niitä on käytettävä mielekkäästi ja tarkoituksenmukaisesti osana opetusta (Manches ym., 2010; McNeil & Jarvin, 2007). Toimintamateriaalien mekaanisen käytön sijaan on suositeltu, että oppilaiden on pohdittava toimintamateriaalien kautta opittua (Clements, 1999) sekä keskusteltava luokkakavereiden kanssa omista havainnoistaan ja ratakaisuistaan (Marshall & Swan, 2008).

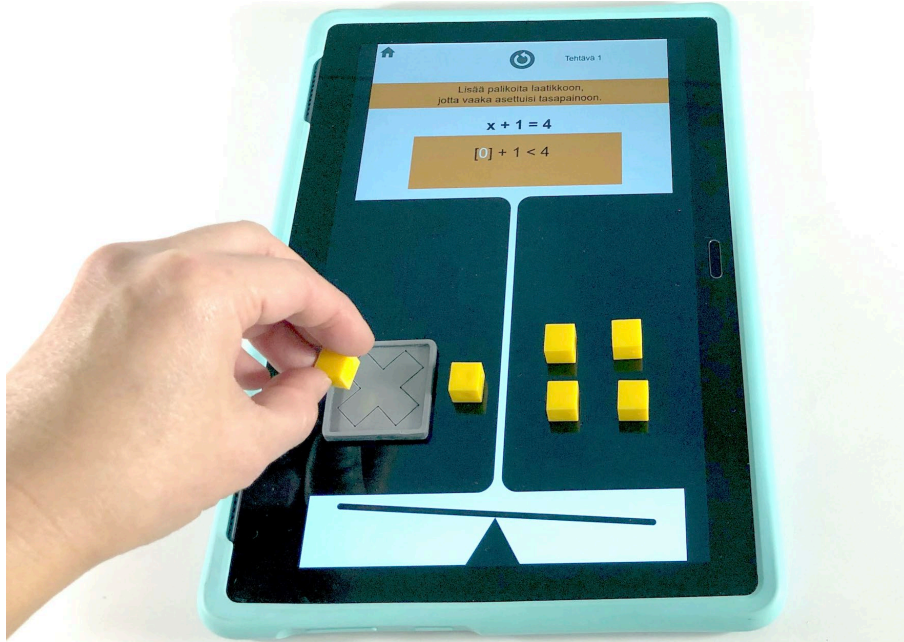
## 2 Multimodaalinen teknologinen toimintamateriaali yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa

### 2.1 Kehitetty toimintamateriaali

Väitöstutkimuksen esivaiheessa havaittiin, että fyysisiä (perinteisiä) toimintamateriaaleja liikuttaessa oppilaat keskittyivät oman yhtälön ratkaisemisen prosessiin ja pikkuhiljaa konkretisoivat opittavia käsitteitä. Kun taas tablettisovellusta käytettäessä monet oppilaat ratkaisivat yhtälöitä samalla tavalla kuin pelaisivat peliä. He eivät jääneet ajattelemaan opittavaa asiaa vaan painelivat ja pyyhkäisivät sormin tabletin ruutua. Toisaalta sovellus motivoi oppilaita ja antoi heille reaaliaikaista ohjausta ja palautetta.

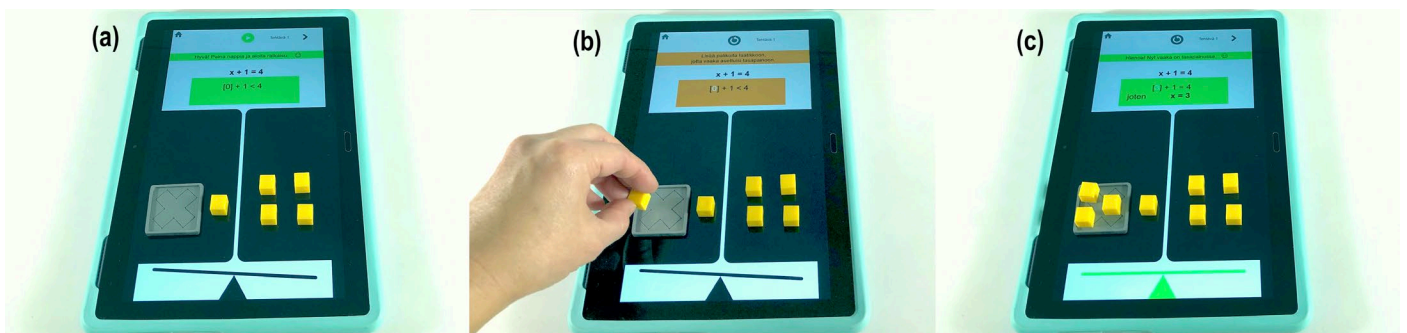
Tampereen yliopiston tietojenkäsittelytieteen opiskelijatiimin kanssa yhteistyössä kehitettiin edellä kuvattujen havaintojen pohjalta multimodaalinen teknologinen toimintamateriaali. Kehitetty toimintamateriaali yhdistää fyysisten ja digitaalisten toimintamateriaalien vahvuudet hyödyntämällä multimodaalista teknologiaa (ks. kuva 1). Oppilas manipuloi sovellusta liikuttamalla fyysisiä esineitä (kymmenjärjestelmä-

välineitä ja harmaita, yhtälössä tuntematonta symboloivia levyjä) kosketusnäytön painelun ja pyyhkäisyyn sijaan. Oppilaan toiminnan mukaan sovellus antaa ohjausta ja palautetta eri esitysmuotojen kautta tekstinä, kuvina ja matematiikan symboleina.



Kuva 1. Oppilaan vuorovaikutus kehitetyn multimodaalisen teknologisen toimintamateriaalin kanssa. Vuorovaikutus tapahtuu taktiilisen toiminnan, kirjoitetun, kuviokielen ja matematiikan symbolikielen kautta. (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Kuvassa 2 esitetään, miten yhtälö  $x + 1 = 4$  ratkaistaan vaiheittain kokeilemalla tai päätelemällä kehitetyn toimintamateriaalin avulla.



Kuva 2. Yhtälön  $x + 1 = 4$  vaiheittain ratkaiseminen kokeilemalla tai päätelemällä (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Tehtävän alussa sovellus antaa ratkaistavan yhtälön matematiikan symboleilla eli kaksi *lauseketta* (yhtäsuuruusmerkin vasen ja oikea puoli), jotka ovat yhtä suuret (esim. kuvassa 2 yhtälönä  $x + 1 = 4$ ). Sen jälkeen oppilas muodostaa yhtälön

annetuista lausekkeista fyysisillä esineillä tabletin näytössä olevaan vaakaan (esim. kuvassa 2a yksi tuntematon levy ja yksi ykköskuutio vaa'an vasemmalle puolelle ja neljä ykköskuutiota vaa'an oikealle puolelle). Yhtälön muodostamisen jälkeen oppilas ratkaisee yhtälön lisäämällä ykköskuutioita tuntemattoman levyille (esim. kuvassa 2b näkyy kuviokielellä ja matematiikan symbolikielellä, että kaksi ykköskuutiota yhteenlaskettuna on vähemmän kuin neljä ykköskuutiota eli  $1 + 1 < 4$ ), kunnes vaaka on tasapainossa. Tällöin yhtälö on ratkaistu (esim. kuvassa 2c huomataan, että yhteenlaskettaessa kolmea ja yhtä ykköskuutiota saadaan neljä ykköskuutiota. Siis tämä summa on yhtä suuri kuin neljä ykköskuutiota eli  $3 + 1 = 4$ ).

## 2.2 Kokeilu alakoulussa

Kehitettyä toimintamateriaalia ja siihen liittyvää oppilaan monistetta ja opettajan opasta kokeiltiin eräässä neljännessä luokassa 45 minuutin oppitunnin aikana vuoden 2019 keväällä. Luokassa ei ollut opetettu yhtälönratkaisua aikaisemmin. Oppitunnin alussa luokanopettaja opetti koko luokalle yhtälönratkaisuun tarvittavat käsitteet annettujen materiaalien mukaan:

- Yhtälö muodostuu kahdesta lausekkeesta, jotka molemmat ovat yhtä suuret.
- Yhtälön voi kuvitella tasapainovaa'aksi, jossa molemmat puolet painavat yhtä paljon.
- Yhtälössä voi myös esiintyä tuntematon luku, jota voidaan merkitä millä tahansa kuviolla tai merkillä, esimerkiksi tähden kuvalla tai  $x$ -kirjaimella.
- Yhtälön ratkaisut ovat tuntemattoman luvun arvot, joilla yhtälö on tosi eli yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret.
- Yhtälön voi ratkaista kokeilemalla tai päättelemällä, mikä luku sopii tuntemattoman paikalle, jotta yhtälö on tosi.

Tämän jälkeen opettajan johdolla koko luokka ratkaisi muutamia yhtälöitä yhdessä joko kokeilemalla tai päättelemällä. Sitten oppilaat tekivät itsenäisesti harjoitustehtävät parin kanssa. Jotta toimintamateriaalia käytettäisiin mielekkäällä tavalla, oppilaita kannustettiin muodostamaan ja ratkaisemaan yhtälöitä yhdessä käyttämällä toimintamateriaalia sekä samalla keskustelemaan parin kanssa omista havainnoistaan ja ratkaisuistaan (ks. kuva 3). Yhtälön ratkaisemisen jälkeen jokainen oppilas kuvasi kirjoittamalla ratkaisun ja sen prosessin omalle monisteelle tekstinä, kuvina ja/tai matematiikan symboleina.



Kuva 3. Oppilaspari harjoitteli yhtälönratkaisua kehitetyn toimintamateriaalin ja kielentämisen avulla.

Luokkatyöskentelyssä toimintavälineellä havaittiin kolme erilaista käyttötarkoitusta. Oppilaat käyttivät sitä oppimisvälineenä, kommunikoinnin ja vuorovaikutuksen välineenä seuraavilla tavoilla.

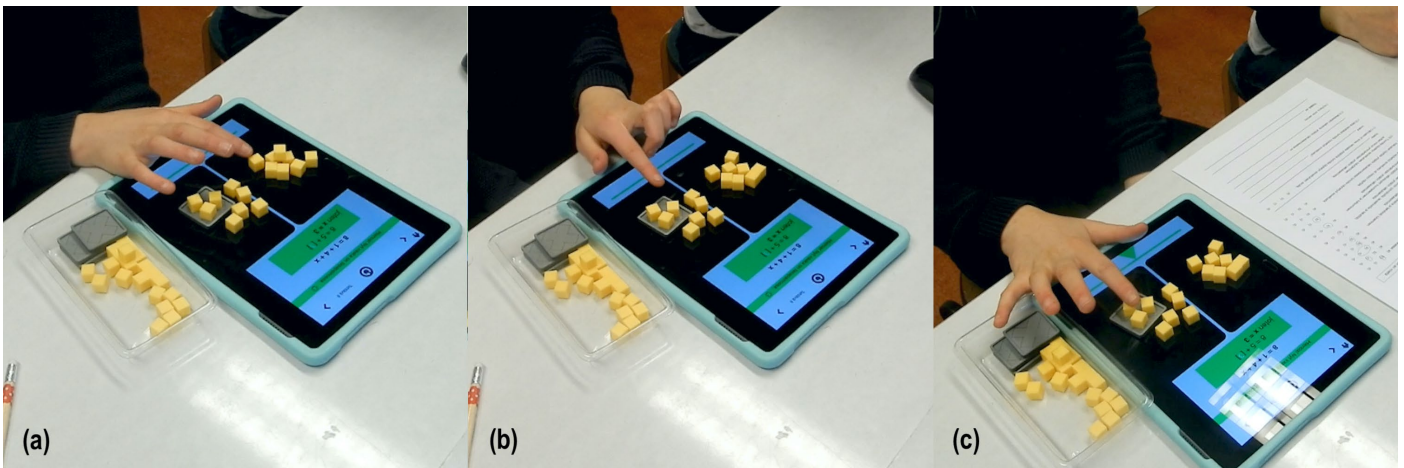
*Oppimisvälineenä:* Parityöskentelyn aikana oppilaat rakensivat yhtälönratkaisun käsitteiden ymmärrystä kielentämisen ja vuorovaikutuksen kautta. Oppilas ratkaisi yhtälöitä konkreettisesti fyysisiä esineitä liikuttamalla. Kun oppilas liikutti esineitä, yhdisti taktiilisen toimintansa muihin esitysmuotoihin (puhuttuun, kirjoitettuun, kuvio- ja matematiikan symbolikieleen) sekä selitti toiselle päätelmiään ja ratkaisujaan, hän jäsensi pikkuhiljaa omaa matemaattista ajatteluaan. Samalla toinen oppilas oppi katsomalla ja kuuntelemalla, miten pari ratkaisi yhtälöitä vaiheittain. Koska oppilaat saivat sovelluksesta nopeita ohjeita ja palautteita, esimerkiksi mitä pitäisi tehdä tai oliko ratkaisu oikea, he pystyivät tekemään tehtäviä pääosin ilman opettajan apua. Lisäksi oppilaat keskittyivät tehtävien tekemiseen, eikä toiminnan aikana tullut ulkopuolisia häiriötekijöitä, jotka olisivat keskeyttäneet heidän toimintansa.

*Kommunikoinnin välineenä:* Tässä kokeilussa monet oppilaat selittivät sekä itselleen että parilleen ratkaisuja paitsi luonnollisella kielellä, niin myös toiminnan kielellä toimintamateriaalien avulla. Onkin havaittu, että lapset yleensä muodostavat asioista omaa ymmärrystään ennen kuin osaavat ilmaista sen puheena (Kilpatrick ym., 2001) tai kirjoituksena (Laine ym., 2018).

*Vuorovaikutuksen välineenä:* Toimintamateriaali auttoi myös oppilaita olemaan vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Sen avulla oppilaat työskentelivät yhdessä aktiivisesti ilman opettajan kannustusta. Oppilaiden vuorovaikutus tapahtui, esimerkiksi kun toinen oppilas ratkaisi yhtälöitä ja ääneen ajatteli ratkaisujaan, toinen katsoi ja kuunteli tai kun toinen oppilas ratkaisi yhtälöitä puhumatta, toinen katsoi.

Oppitunnin jälkeen jokaista oppilasta pyydettiin näyttämään ja selittämään tutkijalle, miten hän ratkaisi yhtälöitä toimintamateriaalilla. Oppilaiden toiminnat ja selitykset osoittivat, että he ymmärsivät yhtälönratkaisun käsitteet ja osasivat ratkaista annetut yhtälöt. Kuvassa 4 eräs oppilas esitti ja selitti tutkijalle, miten hän ratkaisi yhtälön  $8 = 1 + 4 + x$  toimintamateriaalilla:

(a) Tässä on kahdeksan (ositti vaa'an vasemmalla puolella olevaa kahdeksan ykköskuutiota). (b) Ja tämän [vaa'an oikean puolen] (osoitti vaa'an oikean puolen) pitää olla yhtä painava [kuin vasen puoli]. (c) Tähän (osoitti vaa'an oikealla puolella olevan tuntemattoman levyn, jossa oli kolme ykköskuutiota) pitää lisätä [kolme ykköskuutiota], jotta nämä [vaa'an oikealla puolella olevat ykköskuutiot] ovat yhteensä kahdeksan.



Kuva 4. Oppilas selitti yhtälön  $8 = 1 + 4 + x$  ratkaisusta. (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Loppuhaastattelussa oppilaat suhtautuivat kehitettyyn toimintamateriaaliin positiivisesti monista syistä. Oppilaiden vastauksista nousi esille kolme toimintamateriaalin mielekkyyttä tukevaa ominaisuutta: *hyödyllisyys*, *helppokäyttöisyys* ja *miellyttävä käyttökokemus*.

Hyödylliseksi oppilaat kokivat sen, että teknologia mahdollisti reaaliaikaisen opastuksen yhtälöitä ratkoessa. Toimintamateriaali toimi samalla myös laskun tai ratkaisun tarkistamisvälineenä. Hyödyllisenä pidettiin myös sitä, että toimintaväline



tuki uusien käsitteiden konkretisoinnissa sekä johdatteli tutkivaan ja itseohjautuvaan oppimiseen.

Oppilaiden mielestä toimintamateriaalia oli helppo käyttää intuitiivisen käyttöliittymän ansiosta. Tässä auttoi se, että oppilailla oli jo entuudestaan kokemusta tablettilaitteiden käytöstä. Fyysisten esineiden manipulointi koettiin myös vaivattomaksi.

Oppilaat suhtautuivat käsillä tekemiseen, teknologian ja parin kanssa työskentelyyn motivoivampana työskentelytapana perinteiseen kynä-paperi-työskentelyyn verrattuna. Kenties tästä miellyttävästä ja motivoivasta käyttökokemuksesta johtuen oppilaat kertoivat haluavansa käyttää toimintamateriaalia yhtälönratkaisuun tulevaisuudessakin.

Vähän aikaa tutkimuksen jälkeen tutkija sai kuulla luokan opettajalta, että hänen oppilaansa kokivat tekemisen kautta oppimisen ja yhteisöllisen kielentämisen mielekkääksi työtavaksi. Oppilaat halusivat jatkossakin matematiikan tunneilla tehdä kavereiden kanssa harjoitustehtäviä konkreettisia välineitä käyttäen ja keskustellen.

### 3 Lopuksi

Väitöstutkimuksessa kehitetty teknologinen toimintamateriaali käytettiin kielentämällä ja vertaisryhmän kanssa vuorovaikutuksessa yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa. Tutkimustulokset ovat linjassa kirjallisuuden kanssa sen suhteen, että toimintamateriaalit tukevat oppilaiden uusien matemaattisten käsitteiden oppimista (Ikäheimo & Risku, 2004), kommunikointia (Hiebert ym., 1997) ja vuorovaikutusta (Harja, 2015).

Edellä esitetyt esimerkit osoittavat, että teknologisten, konkreettisten välineiden käyttö kielentämisen avulla voi todella tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärrystä, kun niitä käytetään mielekkäästi ja pedagogisesti. Teknologiaa on siis käytettävä tarkoituksenmukaisesti eikä vain teknologian itsensä vuoksi.

Toivomme, että artikkelimme kannustaa opettajia oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärryksen tukemiseen, esimerkiksi toimintamateriaalien avulla, sääntöjen ulkoa muistamisen ja mekaanisen osaamisen sijaan. LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelman kurssit tarjoavat lisää tietoa, miksi ja miten kannattaa hyödyntää kielentämistä ja toiminnallisuutta eri luokka-asteiden matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Toki matematiikan ymmärtävä oppiminen vie aikaa, mutta on kuitenkin vaivan arvoista. Käsitteiden ymmärrys luo pohjan oppilaiden matemaattiselle osaamiselle sekä lisää oppimisen mielekkyyttä ja iloa.

## Kiitokset

Artikkeli pohjautuu Lehtosen väitöstutkimukseen (2022), jossa dosentit Jorma Joutsenlahti ja Päivi Perkkilä toimivat ohjaajina. Toimintamateriaali kehitettiin Tampereen yliopistossa yhteistyössä Fouzia Khanin, Juho Korkalan, Roni Perälän, Niko Sainion, Krishna Bagalen ja Lucas Machadon kanssa.

## Lähteet

- Bogomolny, M. (2007). Raising students' understanding: Linear algebra. Teoksessa J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (toim.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2 Research reports* (s. 65–72). Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45–60. <https://doi.org/10.2304/ciec.2000.1.1.7>
- Harja, A. (2015). *Toiminnallisen matematiikan mahdollisuuksia etsimässä: ”Sen kautta voidaan luoda niin paljon iloa ja yhteistyötä ja semmosta syvällisempää ymmärtämistä”*. [Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. JYX. <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/59889/URN%3aNBN%3afi%3ajyu-201810224471.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. NH. Print.
- Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. (2004). Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 222–240). Niilo Mäki Instituutti.
- Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & T. Marttila (toim.), *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta*. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, s.188–196).
- Joutsenlahti J., & Rättyä K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus: Kohti kokonaisvaltaista oppimista*. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8, s. 45–62).
- Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Nieminen & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 137–148). Opetushallitus.
- Juhola, A. (2018). *Luokanopettajien käsityksiä matematiikan oppimisesta toimintavälineillä* [Pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto]. UEF eRepo. [https://erepo.uef.fi/bitstream/handle/123456789/20469/urn\\_nbn\\_fi\\_uef-20181497.pdf](https://erepo.uef.fi/bitstream/handle/123456789/20469/urn_nbn_fi_uef-20181497.pdf)
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (toim.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Laine, A., Ahtee, M., Näveri, L., Pehkonen, E., & Hannula, M. S. (2018). Teachers' influence on the quality of pupils' written explanations – Third-graders solving a simplified arithmagon task during a mathematics lesson. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 6(1), 87–104. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.6.1.255>
- Lehtonen, D., (2022). *'Now I get it!': Developing a real-world design solution for Understanding Equation-Solving Concepts*. [Väitöskirja, Tampereen yliopisto]. Trepo.

<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/136918/978-952-03-2250-2.pdf?sequence=5&isAllowed=y>

- Lehtonen, D., Machado, L., Joutsenlahti, J., & Perkkilä, P. (2020). The potentials of tangible technologies for learning linear equations. *Multimodal Technologies and Interaction*, 4(4), Artikkele 77. <https://doi.org/10.3390/mti4040077>
- Magruder, R. (2012). *Solving linear equations: A comparison of concrete and virtual manipulatives in middle school mathematics*. [Väitöskirja, University of Kentucky]. UKnowledge. [https://uknowledge.uky.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1001&context=edc\\_etds](https://uknowledge.uky.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1001&context=edc_etds)
- Manches, A., O'Malley, C., & Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: A comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers and Education*, 54(3), 622–640. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.09.023>
- Marshall, L., & Swan, P. (2008). Exploring the use of mathematics manipulative materials: Is it what we think it is? Teoksessa J. Renner, J. Cross & L. McCormack (toim.), *Proceedings of EDU-COM 2008 International Conference—Sustainability in higher education: Directions for change* (s. 338–350). Edith Cowan University.
- McNeil, N. M., & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice*, 46(4), 309–316.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175–197. <https://doi.org/10.1023/A:1014596316942>
- Opetushallitus. (2015). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Suomen yliopistopaino.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. W. W. Norton & Company.
- Pires, A. C., González Perilli, F., Bakala, E., Fleisher, B., Sansone, G., & Marichal, S. (2019). Building blocks of mathematical learning: Virtual and tangible manipulatives lead to different strategies in number composition. *Frontiers in Education*, 4, Artikkele 81. <https://doi.org/10.3389/educ.2019.00081>
- Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? Teoksessa A. H. Schoenfeld (toim.), *Assessing mathematical proficiency* (Vol. 53, ss. 59–73). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378>
- Ylä-Rautio, I. (2021). *Luokanopettajien käsityksiä ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulun matematiikan opetuksessa* [Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto]. Helda. [https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/328600/Yla-Rautio\\_pro\\_gradu\\_2020.pdf?sequence=2](https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/328600/Yla-Rautio_pro_gradu_2020.pdf?sequence=2)