

Yhteisöllisyyttä, ongelmanratkaisua ja muita 21. vuosisadan taitoja yläkoulun ja lukion matematiikan opetukseen

Päivi Portaankorva-Koivisto¹ ja Antti Viholainen²

¹ Kasvatustieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

² Luonnontieteiden ja metsätieteiden tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Tulevaisuudessa tarvittavissa taidoissa korostuvat useiden näkemysten mukaan sekä ajattelun taidot että yhteistyö- ja viestintätaidot. LUMATIKKA-hankkeen luokkien 7–9 ja lukion matematiikan opetukseen suunnatuilla kursseilla painotetaan niin sanottuihin 21. vuosisadan taitoihin liittyen yhteisöllistä oppimista, matemaattista kielentämistä, mallintamista ja ongelmanratkaisua. Näiden asioiden painottuessa matematiikan opetuksesta tulee vuorovaikutteista ja oppilaiden omaa ajattelua aktivoivaa. Oppilaat tarvitsevat kykyä päätellä, perustella ja havainnollistaa ajatteluaan eri tavoin. Tällöin korostuu myös formatiivisen arvioinnin ja erityisesti palautteen merkitys opetuksen osana. LUMATIKKA-täydennyshankkeen yläkoulun 7–9 kurssilla lähtökohtana on oppilaslähtöisyys ja toiminnallisuus. Lukion kurssilla tavoitteena ovat opiskelijakeskeisyys ja opiskelun mielekkyys. Tässä artikkelissa perustelemme tarkemmin näille kursseille valittujen sisältöjen merkitystä.

Avainsanat: yhteisöllinen oppiminen, ongelmanratkaisu, kielentäminen, formatiivinen arviointi, 21. vuosisadan taidot

Yhteystiedot: paivi.portaankorva-koivisto@helsinki.fi

1 Johdanto

Tässä artikkelissa perustelemme LUMATIKKA-hankkeen yläkoulun ja lukion opettajille suunnattujen täydennyskoulutuskursseille valittujen sisältöjen suuntaviivoja kurssin toteuttajien näkökulmasta. Yläkoulun kurssi on otsikoitu [Luokkien 7–9 matematiikkaa oppilaslähtöisesti ja toiminnallisesti](#). Se kuvastaa hyvin sisällöissä painottuvaa vuorovaikutteisuuutta ja aktiivisuutta. Lukion kurssi [Lukiomatematiikkaa opiskelijakeskeisesti ja mielekkäästi](#) ottaa myös esille oppimisen merkityksellisyyden. Molempia kursseja yhdistävät yhteisöllisyys, ongelmanratkaisu ja mallintaminen. Seuraavissa alaluvuissa tarkastelemme tarkemmin, miksi juuri nämä sisällöt on nähty tärkeiksi ajatellen opettajien täydennyskoulutusta.

Kaiken taustalla ovat *tulevaisuuden taidot* tai niin kutsutut *21. vuosisadan taidot*, jotka ovat olleet keskiössä, kun eri maissa on hahmoteltu opetussuunnitelmien ääri- viivoja (Binkley ym., 2012). Näin näyttäisi olevan myös meillä Suomessa. Esimerkiksi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 kuvataan jo alkulehdillä,



miten perusopetuksen tehtävänä on ”ohjata oppilaita löytämään omat vahvuutensa ja rakentamaan tulevaisuutta oppimisen keinoin” (Opetushallitus, 2014, s. 18). Samoin lukion opetussuunnitelmien perusteissa (Opetushallitus, 2019, s. 16) todetaan, että ”lukiokoulutus ohjaa opiskelijaa tulevaisuuden suunnitelmien laadintaan, maailmankansalaisuuteen kasvamiseen ja jatkuvaan oppimiseen”. Tulevaisuuden taidot nähdään siis keskeisinä opetuksen ja oppimisen kohteina riippumatta oppiaineista.

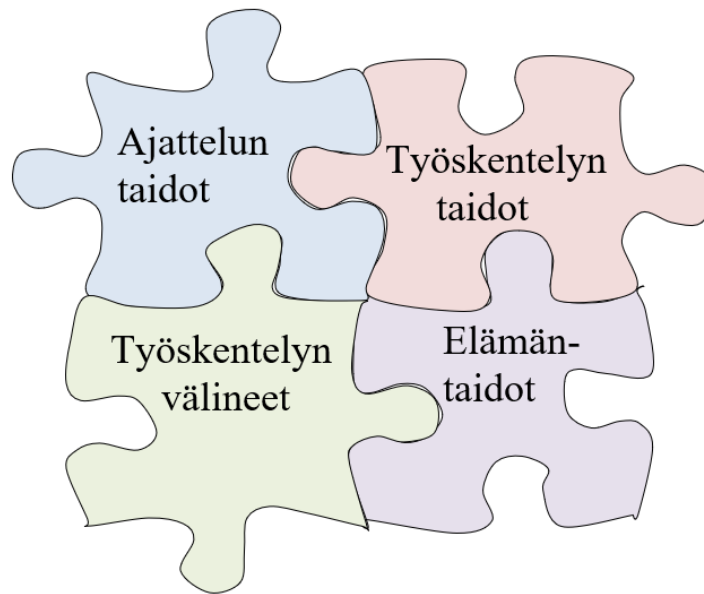
Taulukko 1. OECD:n (2005) 21. vuosisadan kompetenssit

TYÖVÄLINEIDEN VUOROVAIKUTTEINEN KÄYTTÖ
1. Kielen, symbolien ja tekstien käyttö
2. Tiedon ja informaation käyttö
3. Teknologian käyttö
HETEROGEEENISSÄ RYHMISSÄ TOIMIMINEN
4. Kyky tulla toimeen muiden kanssa
5. Kyky tehdä yhteistyötä
6. Kyky hallita ja ratkaista konflikteja
ITSENÄINEN TYÖSKENTELY
7. Kyky toimia osana suurempaa kokonaisuutta
8. Kyky muodostaa ja toteuttaa elämänsuunnitelmia ja henkilökohtaisia projekteja
9. Kyky puolustaa ja vaatia oikeuksiaan, intressejään, rajojaan ja tarpeitaan

Kirjallisuudessa on tarjolla 21. vuosisadan taidoille useita eri kehikoita, joista eräs tunnetuimmista on OECD:n vuosina 1997–2002 toteutetun DeSeCo-projektin (Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations) määrittelemät *yhdeksän kompetenssia* (taulukko 1) (Miettinen, 2019). Tässä kehikossa korostuvat erityisesti kyky työskennellä varioivissa ympäristöissä, toimia yhdessä toisten kanssa sekä myös kyky työskennellä itsenäisesti. Eri kehikoita kuitenkin yhdistää juuri tavoite elinikäisestä oppimisesta ja siihen liittyvistä taidoista (Häkkinen ym., 2017).

Eritavoin kiteytetyt 21.vuosisadan taidot voidaan jakaa neljään luokkaan (kuvio 1)

1. *ajattelun taidot*, kuten kriittinen ajattelu, luovuus ja ongelmanratkaisu
2. *työskentelyn taidot*, kuten yhteistyö- ja viestintätaidot
3. *työskentelyvälineisiin liittyvät monilukutaidot*, kuten data-, media- ja digिताidot, sekä
4. *elämäntaidot*, joihin kuuluu yksilöllisiä kehitettäviä piirteitä, kuten joustavuus, johtajuus, aloitteellisuus, tuottavuus ja ihmistaidot (Binkley ym., 2012).



Kuvio 1. Neljään luokkaan jaotellut 21. vuosisadan taidot (Binkley ym., 2012)

Vaikka 21. vuosisadan taidot hyväksytäänkin yleisesti monien opetussuunnitelmien taustaksi, niitä kohtaan on esitetty myös kritiikkiä. Pääasiallinen kritiikki kohdistuu siihen, että ne keskittyvät vain *geneerisiin taitoihin*, eivätkä ota huomioon eri maiden kulttuureita, yleissivistystä ja eri tiedonalojen taitoja (Miettinen, 2019). Lisäksi ne liittyvät vahvasti *kompetenssiajatteluun*, joka tarkastelee kasvatusta mitattavuuden näkökulmasta nähden sen erityisen tärkeäksi ihmisten työllistymisen ja talouden kehityksen kannalta ja samalla kaventaen kasvatuksen tarkoitusta ja sisältöjä (Miettinen, 2019). Seuraavassa luvussa tarkastelemme, miten 21. vuosisadan taidot näkyvät Suomessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (taulukko 2) ja lukiokoulutuksessa.

2 Oppimistavoitteet opetussuunnitelmien perusteissa

2.1 Tavoitteet peruskoulussa

Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa 21. vuosisadan taidot näkyvät erityisesti laaja-alaisen osaamisen kuvauksissa, mutta matematiikan oppiaineessa monet näistä odotuksista tulevat esille myös työskentelytaidoissa. Taulukko 2 esittää, miten matematiikan työskentelyt taidot sijoittuisivat suhteessa 21.vuosisadan taitoihin.

Taulukko 2. Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden matematiikan päättöarvioinnin kriteerit T2–T9 suhteutettuna 21. vuosisadan kompetensseihin

21. vuosisadan taidot		Matematiikan päättöarvioinnin kriteerit (Opetushallitus, 2014)
Ajattelun taidot	Kriittinen ajattelu	T8 Tiedon analysointi ja kriittinen tarkastelu
	Luovuus	T5 Ongelmanratkaisutaito
	Ongelmanratkaisu	T5 Ongelmanratkaisutaito
Työskentelyn taidot	Yhteistyö	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Viestintä	T4 Matemaattinen ilmaisu
Työskentelyn välineet	Datataidot	T9 Tieto- ja viestintäteknologian käyttö
	Mediataidot	T7 Matematiikan soveltaminen
	Digitaidot	T9 Tieto- ja viestintäteknologian käyttö
Elämäntaidot	Joustavuus	T3 Opittujen asioiden yhteydet
	Johtajuus	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Aloitteellisuus	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Tuottavuus	T6 Taito arvioida ja kehittää matemaattisia ratkaisuja
	Ihmistaidot	T2 Vastuunottaminen opiskelusta

Matematiikassa opetuksen tavoitteita on kaikkiaan 20. Ensimmäiset kaksi tavoitetta liittyvät opetuksen merkitykseen, arvoihin ja asenteisiin. Tavoite 1 on *vahvistaa oppilaan motivaatiota, myönteistä minäkuvaa ja itseluottamusta matematiikan oppijana*, eikä sitä ole tarkoitus arvioida. Tämän vuoksi se on jätetty pois taulukon 2 luokittelusta. Tavoite 2 *Vastuunottaminen opiskelusta* sisältää sekä työskentelyn taitoja ryhmässä, että kykyä johtajuuteen ja aloitteellisuuteen. Tavoite 3 *Opittujen asioiden yhteydet* syventää ajattelun joustavuutta. Tavoite 4 kohdistuu *matemaattiseen ilmaisuun* ja näkyy erityisesti viestintätaidoissa. Tavoite 5 *Ongelmanratkaisutaidot* on suoraan yhdistettävissä ajattelun kompetensseihin. Tavoite 6 sisältää *taidon arvioida ja kehittää matemaattisia ratkaisuja* ja se voidaan tulkita tuottavuudeksi. Tavoite 7 *Matematiikan soveltaminen* kytkeytyy mediataitoihin ja kykyyn kytkeä matematiikka reaalimaailmaan. Tavoite 8 liittyy *tiedon analysointiin ja kriittiseen tarkasteluun* ja soveltuu myös sellaisenaan ajattelun kompetensseihin. Viimeisenä tavoite 9 *Tieto- ja viestintäteknologian käyttö* on yhteydessä sekä data- että digitaitoihin.

2.2 Tavoitteet lukiossa

Kuten perusopetuksen, niin myös lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2019) useat 21. vuosisadan taidot tulevat esiin. Kaikkien selkeimmin korostuvat ajattelun taidot. Opetussuunnitelman mukaan lukion matematiikan opetuksen tulisi *kehittää luovan ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja sekä rohkaista*

tutkivaan ja kokeilevaan toimintaan. Lisäksi oppimistavoitteissa mainitaan väittämien oikeellisuuden tutkiminen, perustelujen laatiminen sekä perustelujen pätevyyden ja tulosten yleistettävyyden arviointi. Työskentelytaidoista mainitaan vaihtelevat työtavat yksin ja yhdessä työskennellessä. Vuorovaikutusosaamista korostetaan yleisesti, ja erityisesti mainitaan vielä kyky keskustella matematiikasta ja perustella väitteitä. Data-, media- ja digitaitojen suhteen mainitaan tarkoituksenmukaisten menetelmien, ohjelmistojen ja tietolähteiden käyttö. Lisäksi tavoitteissa tulee esiin kyky seurata matemaattista esitystä ja lukea matemaattista tekstiä sekä kyky arvioida eri muodoissa tarjottua matemaattista informaatiota.

Vuoden 2019 lukion opetussuunnitelma korostaa selkeästi aiempia opetussuunnitelmia enemmän laaja-alaista osaamista ja oppiaineiden välistä yhteistyötä. Matematiikan opiskelun tulisi tukea ”globaali- ja kulttuuriosaamisen sekä monitieteisen ja luovan osaamisen laaja-alaisia tavoitteita” (Opetushallitus, 2019, s. 221). Opetussuunnitelman mukaan lukiomatematiikan opintojen tulisi *vahvistaa myös opiskelijan yhteiskunnallista osaamista, ympäristöosaamista, eettisyyttä ja hyvinvointiosaamista* tarjoamalla virikkeitä sen pohtimiseen, *miten matematiikan taitoja voisi hyödyntää kestävässä kehityksessä ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa.* Erikseen mainitaan, että opiskelijan tulisi *oppia ymmärtämään matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja niiden yhteyksiä laajempiin kokonaisuuksiin sekä matematiikassa että muissa oppiaineissa.* Nämä kaikki liittyvät elämäntaidoissa mainittuihin teemoihin.

3 LUMATIikka-kurssit matematiikan opetuksen tueksi

3.1 Peruskoulun luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevä kurssi

LUMATIikka-hankkeen luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevä osio pyrkii huomioidaan osaltaan 21. vuosisadan taitojen kehittämisen erityisesti ongelmanratkaisun, matemaattisen ilmaisun, yhteisöllisyyden ja matematiikan soveltamisen näkökulmista. Osiossa käsitellään tutkimusten kautta esille tulleita matematiikan opetuksen kehittämiskohteita ja vastataan arjen työelämässä opetussuunnitelmien edellyttämällä tavalla toimivien opettajien tarpeisiin. Osiossa on yhteensä 16 teemaa (kuva 1).

SISÄLTÖ		
Johdanto		
1. Lue tämä		
Eteneminen: 2 / 5		
2. Opettaja havainnollistaa matematiikkaa (sis. harjoituksen)		
Eteneminen: 4 / 6		
3. Arviointi tavoitteiden tukena		
Eteneminen: 1 / 4		
4. Yhteisöllinen oppiminen		
Eteneminen: 8 / 10		
5. Oppilaat toimimaan!		
Eteneminen: 5 / 7		
6. Matemaattisen ajattelun kielentäminen (sis. harjoituksen)		
Eteneminen: 5 / 9		
7. Ongelmanratkaisun vaiheet		
Eteneminen: 1 / 3		
8. Ongelmanratkaisu ja itsesääty		
Eteneminen: 1 / 4		
9. Ongelmanratkaisun opettamisesta		
Eteneminen: 4 / 6		
10. Koulumatematiikan tarina		
Eteneminen: 5 / 6		
11. Mallintaminen		
Eteneminen: 2 / 3		
12. Mallintaminen matematiikan opetuksessa		
Eteneminen: 2 / 3		
13. Laskutaito koneiden aikakaudella		
Eteneminen: 1 / 2		
14. Ohjelmointi ja algoritmit		
Eteneminen: 3 / 7		
15. Matematiikka yhteiskunnassa (sis. harjoituksen)		
Eteneminen: 2 / 4		
16. Monialaiset oppimiskokonaisuudet		
Eteneminen: 2 / 3		
17. Formatiivista arviointia kehittämässä (sis. harjoituksen)		
Eteneminen: 4 / 7		
18. TEORIAOSAN PÄÄTTÄVÄ TESTI		
Eteneminen: 0 / 1		
19. TODISTUS		
Eteneminen: 1 / 2		
20. Tekijät		

Kuva 1. LUMATIikka-hankkeen luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevän kurssin sisältö

Kurssi alkaa *havainnollistamisen* käsittelemisellä, mikä herättelee opettajan pohtimaan erilaisten *representaatioiden* merkitystä matematiikan opetuksessa. Havainnollisuus linkittyy erityisesti 21. vuosisadan taidoista työskentelyn välineisiin (ks. taulukko 2). Kun on tutustuttu havainnollisuuteen, tarkastelun kohteeksi tulevat *työskentelyn taidot*. Ensimmäisenä näistä on *yhteisöllisyys*, sitten *yhdessä toimiminen* ja lopulta *kielitietoinen matematiikan opetus*. *Ajattelun taidoissa* yläkoulun 7–9 luokkien osiossa keskitytään *ongelmanratkaisuun* ja *mallintamiseen*, sekä huomataan, että yhteisöllinen oppiminen ja kielentäminen liittyvät kiinteästi sekä näihin että sanallisiin tehtäviin (Björn ym., 2019), tukien näin kaikki toisiaan.

Kurssi sisältää myös kytkeviä *matematiikan yhteiskunnalliseen merkitykseen*. Esimerkiksi *ohjelmoinnista* ja samoin *monialaisista oppimiskokonaisuuksista* löytyy omat osionsa, joiden tavoitteena on, että oppilaat voivat hahmottaa ”koulussa opiskeltavien asioiden merkitystä oman elämän ja yhteisön sekä yhteiskunnan ja ihmiskunnan kannalta”, sekä samalla saada ”aineksia maailmankuvansa laajentamiseen ja jäsentämiseen” (Opetushallitus, 2014, 31). Näiden sisältöjen voidaan katsoa tukevan 21. vuosisadan taitojen elämän taitoja. Kurssin päättää *formatiivisen arvioinnin* osio, jonka tavoitteena on tukea oppilaan oppimista palautteen avulla ja vahvistaa hänen itseohjautuvuuttaan.

3.2 Lukion matematiikkaa käsittelevä kurssi

Lukiomatematiikan opetukseen suunnatussa osiossa (kuva 2) lähdetään liikkeelle *matematiikan perusuonteesta*. Samalla pohditaan, mikä matematiikan opetuksessa on olennaista ja tärkeää ja mistä koostuu nykypäivänä tarvittava hyvä matemaattinen osaaminen. Nämä kysymykset ovat ajankohtaisia siitä syystä, että teknologisten sovellusten ja *CAS-laskennan* käyttöönotto on monella tapaa muuttanut matemaattisen työskentelyn luonnetta etenkin lukiossa.

Tämän jälkeen lukio-osuuden kurssilla keskitytään erityisesti amerikkalaisen matematiikan opetuksen alan kansallisen järjestön NCTM:n (National Council of Teachers of Mathematics) standardeissakin esille tuleviin *matematiikan prosessitavoitteisiin* eli a) *ongelmanratkaisuun*, b) *perusteluun ja todistamiseen*, c) *matemaattiseen kommunikointiin*, d) *matemaattisen tiedon esitystapoihin* ja e) *yhteyksien ymmärtämiseen*. Näiden teemojen lisäksi kurssi tarjoaa arviointiin ja yhteisölliseen oppimiseen useita opiskelijakeskeisyyttä painottavia näkökulmia.

SISÄLTÖ		
Johdanto		
1. Lue tämä	9. Ongelmanratkaisun opettamisesta	17. Arvioinnin kehittämiskohteet
Eteneminen: 1 / 4	Eteneminen: 4 / 7	Eteneminen: 1 / 3
2. Mitä on matematiikka?	10. Matemaattisen ajattelun kielentäminen (sis. harjoituksen 2)	18. Formatiivista arviointia kehittämässä (sis. harjoituksen 4)
Eteneminen: 0 / 6	Eteneminen: 2 / 8	Eteneminen: 1 / 8
3. Mitä on matematiikan osaaminen?	11. Perustelemine ja todistaminen	19. TEORIAOSAN PÄÄTTÄVÄ TESTI
Eteneminen: 0 / 8	Eteneminen: 0 / 7	Eteneminen: 0 / 1
4. Prosessitavoitteet	12. Esitysmuodot	20. TODISTUS
Eteneminen: 0 / 3	Eteneminen: 0 / 7	Eteneminen: 0 / 2
5. Arviointi matematiikan tekemisen taitona	13. Dynaamiset esitysmuodot (sis. harjoituksen 3)	21. Tekijät
Eteneminen: 0 / 4	Eteneminen: 1 / 5	22. Bonusmateriaali: Ohjelmointi ja algoritmit
6. Yhteisöllinen oppiminen (sis. harjoituksen 1)	14. Koulumatematiikan tarina	Eteneminen: 0 / 5
Eteneminen: 2 / 9	Eteneminen: 0 / 7	23. Bonusmateriaali: Talousmatematiikka - Lainat
7. Ongelmanratkaisun vaiheet	15. Matemaattinen mallintaminen	
Eteneminen: 0 / 3	Eteneminen: 0 / 6	
8. Ongelmanratkaisu ja itsesäätely	16. Matematiikka yhteiskunnassa	
Eteneminen: 0 / 3	Eteneminen: 0 / 4	

Kuva 2. LUMATIKA-hankkeen lukiomatematiikkaa käsittelevän kurssin sisältö.

Seuraavaksi pureudumme tarkemmin joihinkin näistä sisältöalueista ja perustelemme niiden merkitystä tutkimuksen näkökulmasta. Tarkastelemme aluksi sisältöjä, jotka tulevat esille sekä luokkien 7–9 kurssilla että lukion kurssilla. Näistä ensimmäisenä on yhteisöllisyys, joka myöhemmin yhdistyy kielentämiseen, mallintamiseen ja ongelmanratkaisuun osana matematiikan oppimista.

4 Yhteisöllisyys

Yhteisöllisyyteen liittyvät tavoitteet painottuvat vahvasti sekä 21. vuosisadan tavoitteissa että matematiikan opetussuunnitelman perusteissa – olivatpa ne sitten yläluokille (Opetushallitus, 2014) tai lukioon (Opetushallitus, 2019) suunnattuja. Nämä ovatkin keskeisiä teemoja myös molemmilla edellä esitellyillä LUMATIikka-hankkeen kursseilla. Yhteisöllisyys tulee esille erityisesti, kun pohditaan tulevaisuuden työelämätaitoja ja tarvetta jakaa ideoita ja yhdistää kunkin erilaista osaamista.

Yhteisöllisyyden oppimiseen liittyvät tavoitteet ovat tärkeitä jo itsessään, mutta toisaalta yhteisöllisyyttä voidaan pitää myös oppijoita aktivoivana oppimisen välineenä. Parhaimmillaan yhteisöllisyys tukee oppimista, ja silloin on kyse *yhteisestä tiedonmuodostuksesta*, merkitysten rakentamisesta ja yhteisen ymmärryksen etsimisestä. Näissä työskentelyn taidoissa yhteisölliseen oppimiseen yhdistyy kysymysten tekemistä, selittämistä, perustelemista ja omien näkemysten puolustamista sekä työstämistä. (Häkkinen ym., 2017.)

Yhteisöllistä oppimista voidaan tarkastella kolmesta näkökulmasta. Ensinnäkin yhteisöllisessä oppimisessa on kyse yhdessä toimimisesta, jolla edistetään oppimista eri oppiaineissa (*collaborating to learn*). Tässä merkityksessä tavoitteena on luoda sellainen yhteisöllinen oppimisympäristö, joka houkuttelee ja koukuttaa osallistujia uuden tiedon ääreen ja oppimaan. Toiseksi yhteisöllistä oppimista voidaan tarkastella metataitona, jolloin tavoitteena on nimenomaan oppia työskentelemään yhdessä (*learning to collaborate*). Kolmas näkökulma on metodinen näkökulma eli opettaja käyttää yhteisöllistä oppimista opetusmenetelmänään (*learning to teach by applying collaborative learning approaches*). Hän kannustaa oppilaita kyselemään, selittämään, perustelemaan, väittelemään ja työstämään ajatuksiaan yhdessä muiden kanssa. (Häkkinen ym., 2017.) Yhteisöllisesti siis opitaan sekä 21. vuosisadan taitoja että matematiikkaa. Opiskeltaessa matematiikkaa yhteisöllisesti tulee opetuksen aikana kiinnittää huomiota oppijoiden matemaattisen ajattelun kielentämiseen ja matemaattiseen ilmaisuun.

Vaikka yhteisöllinen oppiminen on havaittu tutkimuksissa erinomaiseksi työmuodoksi erityisesti opiskeltaessa matemaattista päättelyä, se ei ole kovin suosittua. Haasteena on, että se vaatii opettajalta paljon ohjaustaitoja (Schwarz ym., 2021). Opettajan tulee kyetä seuraamaan jokaisen ryhmän työskentelyä, tukemaan sitä sekä kognitiivisesti että emotionaalisesti (Portaankorva-Koivisto ym., 2021), kytkemään työskentelyn aikana esille tulleita asioita toisiinsa ja refleктоimaan työskentelyä. (Schwarz ym., 2021).

Tässä avuksi voisivat tulla niin sanotut *kriittiset hetket* ja niiden havaitseminen. Tällaisia hetkiä ovat *työskentelyn tyhjäkäynti* tai *toimettomuus*, *aiheeseen liittymätön keskustelu*, *tekniset ongelmat*, *epäselvyydet* tai *muut tehtävästä nousevat haasteet* sekä *hämmennys* esimerkiksi ristiriitaisista ratkaisuehdotuksista. Tällaisissa vaiheissa ryhmän työskentely pysähtyy tai ajautuu sivuraiteille. Kriittisiä hetkiä ovat myös *oikean tai väärän ratkaisun löytyminen*, jolloin ryhmän työskentely luonnollisesti loppuu (Schwarz ym., 2021). Näissä tilanteissa opettajan kannattaa puuttua työskentelyyn ja siten edistää oppimista. Hän voi ohjatussaan opiskelijoita seurata heidän työskentelyään, tukea sitä *työtä edistävillä kysymyksillä*, vahvistaa ryhmän yhteenkuuluvuutta ja pysähtyä yhdessä ryhmän kanssa pohtimaan seuraavia askeleita. (Schwarz ym., 2021). Tällainen työskentely edellyttää sekä opettajalta että opiskelijoilta matematiikan kielentämistä, johon tartumme seuraavaksi.

5 Kielentäminen ja kielitietoinen opetus matematiikassa

Matematiikan kielestä puhuttaessa tarjoutuu tarkasteluun kolme erilaista lähtökoh-
taa: oppilaat, opettaja ja oppiaine. Ensinnäkin voidaan tarkastella *luokan monikieli-
syyttä* tai *oppilaiden kielen osaamista*. Toiseksi tarkastelun kohteena voi olla niin sa-
nottu *opetuksen kieli* ja *opettajan osaamat kielet*. Kolmanneksi voidaan tarkastella
matematiikan kieltä, sen kielellisiä piirteitä ja käytänteitä. (Planas ym., 2018). Tämän
lisäksi kielen tutkimiselle on tyypillisesti kolme tarkastelukulmaa: *leksikaalinen*, *syn-
taktinen* ja *diskursiivinen* (Erath ym., 2021). Leksikaalisesta tarkastelusta puhutaan,
kun kiinnitetään huomiota *sanastoon* ja *sanojen merkityksiin*. Syntaktinen tarkas-
telu keskittyy *kielioppiin* ja *sanojen tavutuksiin*. Diskursiivisuus ottaa tarkasteluun
vuorovaikutuksen rakenteet, *rutiinit* ja *erityiset käytänteet*, kuten matematiikassa
selittäminen, perusteleminen ja väittelemine.

Kielentäminen ei suoranaisesti tule esille 21. vuosisadan taidoissa, mutta se on osa
työskentelyn taitoja ja matemaattista ilmaisua. Jos matematiikan opetuksen tavoit-
teeksi asetetaan matemaattisen ajattelun kielentäminen ja kielitietoisuus, ne saavute-
taan tutkimusten mukaan tutkivilla ja perustelemiseen suuntautuvilla opetusmene-
telmillä (Erath ym., 2021). Näillä menetelmillä tuetaan merkityksellistä, käsitteellistä
ja syvempää matematiikan oppimista. Oppitunnilla käytettävien tehtävien tulisi siis
aktivoida keskusteluun. Miten opettajan tulisi tällöin toimia?

Kun opettaja päättää ryhtyä tukemaan kielentämistä ja matemaattista ilmaisua,
hänen tulisi ensimmäiseksi valita tehtävä, joka tuottaa keskustelua. Tällaisia tehtäviä
ovat esimerkiksi *vertailutehtävät* (Palkki, 2018; Palkki & Hästö, 2019) ja *virheelliset*

esimerkit (Palkki, 2016), *avoimet ongelmatehtävät* (Portaankorva-Koivisto ym., 2021), *väittelytehtävät*, *tutkimustehtävät* ja *pelit*. Oppilaiden työskentelyn aikana opettajan tulisi aktiivisesti seurata oppilaiden keskustelua voidakseen valikoida ja ottaa myöhemmin yhteiseen pohdintaan keskusteluissa esille nousseita ideoita. On tärkeää, että opettaja kytkee oppilaiden esittämät ideat matematiikkaan ja tuo ne esille kaikille oppilaille ymmärrettävässä muodossa.

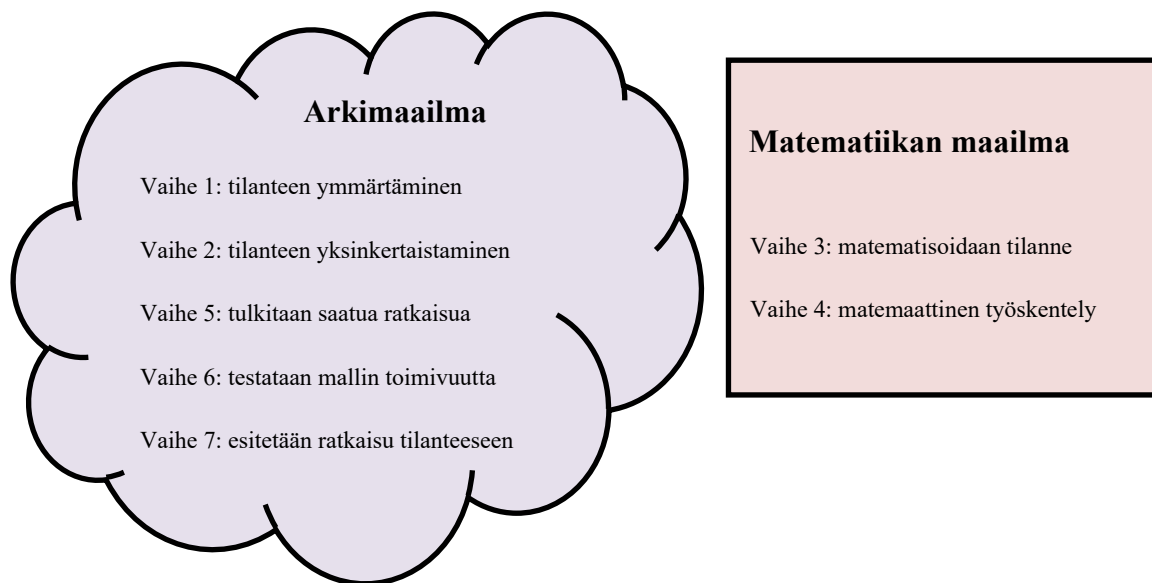
Joissakin tilanteissa on hyvä antaa oppilaiden itse korjata ilmaisuaan. Opettaja voi työskentelyn kuluessa virittää oppilaiden ajattelua pohtimista vaativilla kysymyksillä, mutta muuten pysytellä taustalla ja jättää varsinainen puhujan rooli oppilaille. Hyviä kysymyksiä ovat *mitä-kysymykset*, joilla voidaan jäsentää työn alla olevaa tehtävää. *Miksi-kysymykset* kehittävät käsitteellistä ymmärrystä ja *miten-kysymykset* menettelmällistä sujuvuutta. Opettaja voi myös tukea tai virittää keskustelua eleillä, piirroksilla ja muilla representaatioilla. Varsinkin, jos työskentely seisahtuu tai jauhaa paikoillaan. Samoin opettaja voi ottaa huomioon oppilaiden senhetkiset kielelliset ja matemaattiset taidot ja muotoilla ehdotuksia uudestaan, sanottaa ideoita matemaattisesti ja toistaa tarvittaessa.

Monikielisessä luokassa opettajan kannattaa mahdollisuuksien mukaan valita kieli, joka ilmentää matemaattista ongelmaa parhaiten, antaa käyttöön sanastoja tai synonyymejä, ja tukea kieliopillisesti oppilaiden ilmaisuja. Hyödyllistä on esimerkiksi tutkia sanoja, joilla on jokin kielellisesti yhteinen piirre. Tällaisia ovat vaikkapa sanat ”yhdenmuotoinen”, ”yhtenevä”, ”yhtä suuri” ja ”yhtälö”. (Erath ym., 2021.) Myös *synonyymien* tarkasteleminen on hyödyksi monikielisessä luokassa. Esimerkiksi tehtävissä voi esiintyä *suureita*, joita mitataan metreinä, mutta joita kuitenkin kuvataan erilaisilla sanoilla kuten ”pituus”, ”leveys”, ”korkeus”, ”syvyys”, ”paksuus”, ”välimatka” ja ”etäisyys”.

Kielentäminen voi tarkoittaa myös esimerkiksi arkielämään liittyvän sanallisessa muodossa esitetyn ongelman muuttamista matematiikan symbolikielelle. Tällöin kielentäminen on olennainen osa matemaattista ongelmanratkaisua. Seuraavaksi käsittelemmekin matemaattista mallintamista ja ongelmanratkaisua, jotka kuuluvat 21. vuosisadan ajattelun taitoihin.

6 Matemaattinen mallintaminen ja ongelmanratkaisu

Useissa maissa matematiikan opetussuunnitelmiin on kirjattu tavoite matematiikan kytkemisestä arjen ilmiöihin. Tällaisissa tehtävissä on usein kyse mallintamisesta ja kyvystä muokata ei-matemaattiselta vaikuttava arjen tilanne matematiikan kielelle. (Leiss ym., 2019). Matemaattisessa mallintamisessa on kyse seitsemästä vaiheesta, jotka voivat muodostaa lyhyitä syklejä eli kahden vaiheen välillä vaihdellaan ja muokataan syntyvää mallia paremmin toimivaksi (kuvio 2).

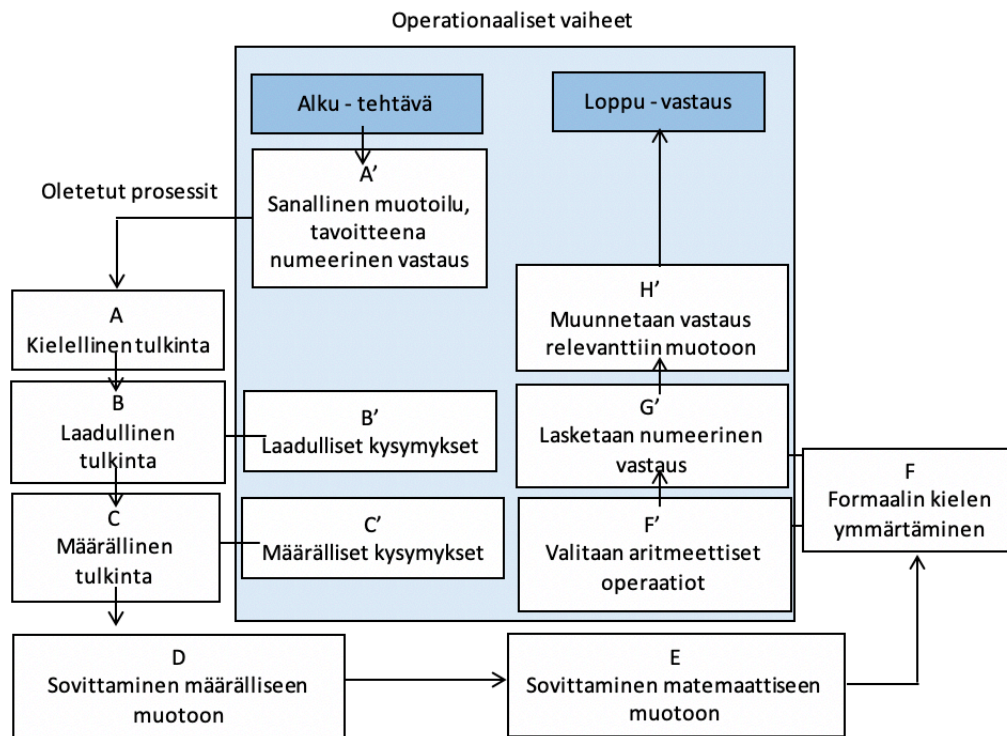


Kuvio 2. Matemaattisen mallintamisen vaiheet (Leiss ym., 2019)

Ensimmäisenä vaiheena on (1) tehtävässä esitetyn *tilanteen ymmärtäminen*. Tämä on se vaihe, joka usein edellyttää kielellistä osaamista ja aiheuttaa useimmat oppilaiden virheistä, mutta seuraavissa vaiheissakin voi vielä tapahtua virheitä. Ymmärtämisvaihetta seuraa (2) tehtävän *tilanteen yksinkertaistaminen* helpommin käsiteltävään muotoon. Nämä kaksi vaihetta ovat vielä vahvasti sidoksissa tehtävän kontekstiin, mutta tämän jälkeen siirrytään pois arkimaailmasta.

Vaiheessa (3) *matematisoidaan havaittu ongelma*. Matematisointivaihe ja sitä seuraava vaihe, jossa (4) *työskennellään matemaattisesti* ovat kontekstiin sitomattomia, mutta kun niiden tuloksena on lopulta saatu jokin ratkaisu, palataan takaisin itse tehtävän tilanteeseen ja (5) *tulkitaan saatua vastausta*. Lopulta, kun (6) *vastausta on testattu* ja havaittu sen toimivan tehtävän ratkaisuna, on vuorossa enää viimeinen vaihe, jossa (7) *esitetään tehtävän ratkaisu ja perustelut*. (Leiss ym., 2019.)

Pearla Nesher (1980) on kuvannut arkielämän ongelman ratkaisemista kaaviolla (kuvio 3), josta havaitaan mallintamisen kielelliset piirteet vielä paremmin.



Kuvio 3. Arkielämän ongelmatehtävän ratkaisuun liittyvät vaiheet ja prosessit (Nesher, 1980)

Useissa tutkimuksissa on havaittu, että matemaattinen mallintaminen matematiikan tunnilla on erilaista kuin mallintaminen arjessa. Pearla Nesher (1980) kertoo artikkelissaan tästä hyvän esimerkin. Hän esitti 5.-luokkalaisille oppilaille kysymyksen: ”Jos kannulliseen 60-asteista vettä lisätään yhtä suuri kannullinen 10-asteista vettä, mitä tapahtuu?” Oppilaat vastasivat tähän ”saadaan 70-asteista vettä”. Jos hän sen sijaan kysyi: ”Mitä tapahtuu, kun kuumaan veteen lisätään kylmää vettä?”, vastaus oli aina ”haaleaa vettä”. (Nesher, 1980.)

Oppilailla onkin taipumus tarkastella tehtäviä joko realistisesti tai epärealistisesti. Kirjassaan *Making Sense of Word Problems* Eric de Corte, Brian Greer, Lieven Verschaffel (2000) kertovat tehtäväsarjoista, joissa oppilaiden tuli ratkaista tehtäväparia. Tehtäväpariin kuului sekä standardi matematiikan tehtävä että ongelmatehtävä. Esimerkkeinä seuraavaksi on kaksi heidän tehtäväpariaan:

- Standarditehtävä (Ystävät):

Pete järjesti 10-vuotissyntymäpäiväjuhlat ja kutsui ystäviään juhlimaan. Hän kutsui juhliin 8 poikaa ja 4 tyttöä. Kuinka monta vierasta hänellä oli juhlissaan?

- Ongelmatehtävä (Ystävät):

Karrilla on 5 ystävää ja Laurilla on 6 ystävää. He päättävät järjestää yhteiset juhlat ja kutsuvat kaikki ystävänsä. Kaikki tulivat paikalle. Kuinka monta vierasta juhlissa oli?

- Standarditehtävä (Lankut):

Tiina osti 5 lankkua, jotka olivat 2 metrin mittaisia. Kuinka monta metrin mitaista palaa hän sai sahattua lankuista?

- Ongelmatehtävä (Lankut):

Tiina osti 4 lankkua, jotka olivat 2,5 metrin mittaisia. Kuinka monta metrin mitaista palaa hän sai sahattua lankuista?

Tutkimuksissa selvitettiin, kuinka moni 10–11-vuotiaista oppilaista vastasi realistisesti ongelmatehtävään. Realistiseksi luokiteltiin vastaus, jossa vastaaja joko kirjoitti Ystävät-tehtävään, että ”ei voida tietää, kuinka monta vierasta juhlissa oli” tai Lankut-tehtävään esimerkiksi $4 \cdot 2 = 8$ tai ”10 palaa, mutta kahden liimaamisessa yhteen oli kova työ”. Ystävät-tehtävään realistisen vastauksen antoi 11 % vastaajista ja Lankut-tehtävään 14 % vastaajista. (de Corte ym., 2000.)

Matemaattisessa mallinnuksessa vaikuttavatkin kolmenlaiset tekijät: *tehtävään liittyvät tekijät, henkilökohtaiset tekijät ja prosessitekijät*. Tehtävään liittyviä tekijöitä ovat *tehtävän kieli, tehtävän konteksti ja sen tuttuus tai outous ja tehtävän kompleksisuus*. Tehtävä vaikeutuu, jos siinä on liikaa tai liian vähän informaatiota, jos se on avoin tai ratkaistavissa useilla tavoilla. Henkilökohtaisia tekijöitä taas ovat *matematiikan osaaminen, lukutaito ja luetun ymmärtäminen*. Prosessitekijöihin luetaan *ongelmanratkaisustrategiat, erilaiset ongelmatyypit ja niihin liittyvät vaikeudet*. (Leiss ym., 2019)

Ongelmanratkaisussa keskeistä on, että osallistujat osaavat tarttua toistensa ideoihin, jakaa aktiivisesti omia ideoitaan, ottaa huomioon ryhmän jäsenten vahvuudet ja myös heikkoudet, säädellä työskentelyään ja rakentaa yhdessä tietoa. Ongelmatehtävän ratkaisussa on havaittavissa kolmenlaisia strategioita: *työstämisen, toistamisen ja organisoinnin strategioita*. Näistä työstämisen strategiat liittyvät tehtävän

kontekstiin ja siihen liittyvien kysymysten selvittelyyn. Tutkimuksissa on havaittu, että oppilaat esittävät itselleen useita tehtävän kontekstiin liittyviä kysymyksiä. Toistamisstrategioita ovat jonkin tekstin osan lukeminen uudestaan ja uudestaan, ja koko tehtävän lukeminen läpi useita kertoja. Yleensä oppilaille riittää lukea sittemmin vain pätkiä tehtävästä, kun se on jo pariin kertaan luettu kokonaisuudessaan läpi. Ratkaisun vaiheisiin kuuluu myös organisointistrategioita, kuten joidenkin tekstin kohtien yhteen vetämistä, alleviivausta ja muistiinpanojen tekemistä. Näistä muistiinpanot olivat tutkimuksissa keskeisimpiä. (Leiss ym., 2019.)

Kun halutaan lisätä vuorovaikutteisuutta ja ongelmanratkaisua osaksi matematiikan opiskelua, myös formatiiviseen arviointiin on kiinnitettävä huomiota. Formattiivisen arvioinnin on havaittu kehittävän juuri päättely- ja perustelutaitoja, joita *pis-teittäisellä* tai *summatiivisella arvioinnilla* on vaikea kehittää. (Herbert ym., 2022.) Myös formatiivinen arviointi on tärkeä teema LUMATIikka-hankkeen kursseilla ja sen voidaan katsoa kehittävän 21. vuosisadan taidoista erityisesti elämäntaitoja. Seuraavaksi tarkastelemmekin vielä formatiivista arviointia päättelyn tukena.

7 Formatiivinen arviointi päättelyn tukena

Herbert ja kumppanit (2022) ehdottavat opettajan avuksi kehikkoa, joka tarkoittaa *päättelyn muotoja* ja auttaa opettajaa havaitsemaan niitä oppilaiden työskentelyssä. Kun opettaja havaitsee päättelyyn viittaavia toimintoja, hänen on helpompi tarttua niihin ja kehittää niitä. Kehikossa onkin esitetty toiminnot syvenevässä järjestyksessä, jolloin opettaja voi koettaa ohjauksellaan siirtää oppilaitaan aina seuraaville tasoille.

Päättelytaidot voidaan jakaa kolmeen osataitoon *analysointi*, *yleistäminen* ja *perusteleminen*. Analysointia ovat *taito vertailla ja asettaa vastakkain*. Oppilaiden työskentelyssä nämä saattavat näkyä *samankaltaisuuksien havaitsemisena* ja yrityksenä luokitella tehtävän tietoja numeeristen tai visuaalisten ominaisuuksien perusteella, havaittujen kategorioiden järjestämisenä ja nimeämisenä, esimerkkien keksimisenä eri kategorioihin ja ennusteiden laatimisenä. Nämä viimeiset toimet osoittavat jo erinomaisia analysointitaitoja. (Herbert ym., 2022.)

Yleistämistä kuvaavat *johtopäätelmien tekeminen*, *kyky siirtää havaittu ominaisuus tilanteesta toiseen*, *selittäminen*, *mitä tapahtuu*, ja *uuteen tilanteeseen sovittaminen*. Työskentelyn aikana nämä voivat näyttäytyä esimerkiksi oppilaan yrityksenä saada muut ryhmässä huomaamaan jokin ominaisuus tai sääntö ja kuvailla sitä sanoin, piirtäen, eleillä tai muilla visualisointikeinoilla. (Herbert ym., 2022.)

Tässä kohtaa on hyvä ottaa esille havainnollistaminen, joka tulee esille yläluokkien 7–9 kurssilla ja liittyy 21. vuosisadan taidoista työskentelyn taitoihin ja välineisiin. Havainnollisuutta tutkittaessa puhutaan tutkimuksissa usein visuaalisuudesta. *Visualisoinnilla* tarkoitetaan juuri kykyä tuottaa, tulkita ja käyttää piirroksia, kuvia ja kaavioita joko mielessään, paperilla tai teknologisia apuvälineitä käyttäen (Presmeg, 2014). Oppitunnin kontekstissa visualisointia käyttävät sekä opettaja havainnollistaessaan opetustaan että oppilas, kun hän tukee esimerkiksi piirtämällä omaa matemaattista ajatteluaan ja ongelmanratkaisuaan. Molemmissa tapauksissa visualisointi tähtää ajatuksenvaihtoon, ideoiden kehittelyyn ja ymmärryksen lisääntymiseen.

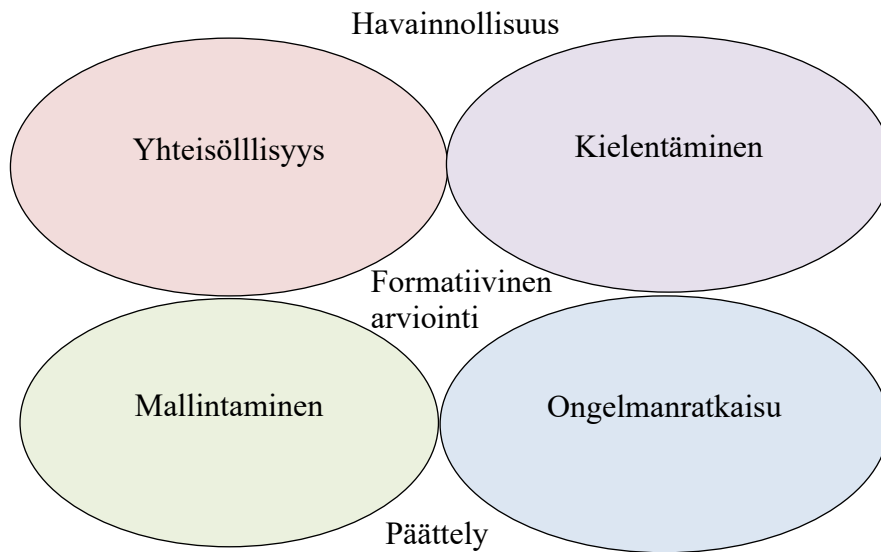
Tutkimuksissa on havaittu, että visualisoinnissa ei ole eroa eri sukupuolten välillä, mutta sen sijaan opettajien ja oppijoiden välillä on havaittavissa merkittävä ero. Oppijat tarvitsevat paljon enemmän visuaalista tukea kuin heidän matematiikan opettajansa (Presmeg, 2014). Tämä on tärkeä havainto, sillä opettajat kokiessaan havainnollistamisen omalta kohdaltaan tarpeettomaksi, jättävät sen käytön vähemmälle. Tutkijat ovat kuitenkin havainneet, että visualisointi parantaa huomattavasti oppilaiden matematiikassa suoriutumista (Gulsen Turgut & Turgut, 2018). Opettajan kannattaa siis käyttää havainnollistamista opetuksessaan ja kannustaa oppilaitaan hyödyntämään sitä opiskelussaan.

Päätellessään matemaattisesti oppilaat kuitenkin siirtyvät visualisoinnista seuraaviin muotoihin. Usein oppilas, joka on kyennyt havaitsemaan jonkin yleistettävän ominaisuuden tehtävästä, ja jolla on hyvät matemaattiset taidot, pyrkii myös esittämään sitä symbolien, lausekkeiden tai kaavan avulla ja selittämään, mitä hän näillä tarkoittaa. Hän saattaa myös soveltaa sääntöä löytääkseen uusia esimerkkejä ja muokata sääntöä toimivampaan suuntaan. (Herbert ym., 2022.)

Perustelemiseen liittyviä taitoja ovat *looginen ajattelu, selittäminen miksi, todistaminen, arvioiminen ja loogiseen lopputulokseen pääseminen*. Perustelemisen taidot tulevat näkyviin oppitunnin työskentelemisessä silloin, kun oppilas kertoo, mitä tehtiin ja pyrkii selittämään, miksi saatu ratkaisu on oikein. Edistyneempiä perustelemisen taitoja osoittaa, kun oppilas pyrkii osoittamaan testaamalla, että saatu ratkaisu toimii, osaa havaita ja korjata virheitä tai epä johdonmukaisuuksia, kykenee perustelemaan päätelmiään nojaten sääntöön tai vastaesimerkkiin, käyttää loogisia argumentteja perustelemisensa tukena ja ehkä vaativimpana kaikista osaa perustella aukottomasti, että väite on tosi ja pätee kaikissa tilanteissa. (Herbert ym., 2022.) Analysointi, yleistäminen ja perusteleminen linkittyvät lopulta kaikkiin niihin taitoihin, joita olemme kuvanneet ja joiden kehittämistä pitänee tärkeänä.

8 Pohdinta

LUMATIKKA-hanketta suunniteltaessa halusimme rakentaa 7.–9.-luokkien ja lukion matematiikan opettajille kursseja, jotka vastaavat sekä opetussuunnitelmien haasteisiin että 21. vuosisadan taitojen huomioimiseen opetuksessa. Halusimme niiden tukevan viimeisimmän tutkimustiedon näkemystä hyvästä matematiikan opetuksesta. Artikkelissa esittelimme syitä, miksi juuri tietyt teemat valittiin mukaan (ks. kuvio 4).



Kuvio 4. LUMATIKKA-koulutuksen yläkoulun 7–9 luokkien ja lukion osioiden keskeiset sisällöt

Yhteisöllisyys, kielentäminen, mallintaminen ja ongelmanratkaisu, sekä näiden rinnalla formatiivinen arviointi, päättely ja havainnollisuus, ovat matematiikan opetuksen perusta, joka vastaa opettajien tarpeisiin, herättelee jo tuttuja teemoja uudella tavalla, syventää näkökulmia, havahduttaa pohtimaan ja ylipäätään nostaa keskustelua matematiikan oppimisesta, opetuksesta ja opiskelusta. Yhdessä nämä muodostavat kokonaiskuvan siitä, mitä matematiikan opetuksessa tällä hetkellä tavoitellaan. Näistä lähtökohdista LUMATIKKA-kurssit tarjoavat tukea opettajille oman opetuksen kehittämiseen.

Lähteet

- Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. Teoksessa P. E. Griffin, B. McGaw, & E. Care (toim.), *Assessment and Teaching of 21st Century Skills* (s. 17–66). Springer.
- Björn, P. M., Äikäs, A., Hakkarainen, A., Kyttälä, M., & Fuchs, L. S. (2019). Accelerating mathematics word problem-solving performance and efficacy with think-aloud strategies. *South African Journal of Childhood Education*, 9(1). <https://doi.org/10.4102/sajce.v9i1.716>

- de Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.
- Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM – Mathematics Education*, 53(2), 245–262.
<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2>
- Gulsen Turgut, İ., & Turgut, S. (2018). The Effects of Visualization on Mathematics Achievement in Reference to Thesis Studies Conducted in Turkey: A Meta-Analysis. *Universal Journal of Educational Research*, 6(5), 1094–1106. <https://doi.org/10.13189/ujer.2018.060531>
- Herbert, S., Vale, C., White, P., & Bragg, L. A. (2022). Engagement with a formative assessment rubric: A case of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 111, 101899. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101899>
- Häkkinen, P., Järvelä, S., Mäkitalo-Siegl, K., Ahonen, A., Näykki, P., & Valtonen, T. (2017). Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP 21): A framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills. *Teachers and Teaching*, 23(1), 25–41. <https://doi.org/10.1080/13540602.2016.1203772>
- Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and Mathematics—Key Factors influencing the Comprehension Process in reality-based Tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(2), 131–153. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835>
- Miettinen, R. (2019). 21. Vuosisadan kompetenssit – OECD kasvatuksen uudistajana. *Kasvatus*, 50(3), 203–215.
- Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the learning of mathematics*, 1(1), 41–48.
- OECD. (2005). *Definition and selection of key competencies: Executive summary*. OECD.
<http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf>
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. <https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/6328/1688825037.pdf?sequence=1>
- Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Palkki, R. (2016). Virheellinen esimerkki matematiikan luokkahuonekeskustelussa. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö (Toim.), *Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 2015* (s. 111–121). Finnish Mathematics and Science Education Research Association.
- Palkki, R. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. *LUMAT General Issue*, 6(1), 105–128.
- Palkki, R., & Hästö, P. (2019). Mathematics teachers' reasons to use (or not) intentional errors. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16, 263–282.
- Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. Teoksessa T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (toim.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (s. 196–210). Routledge.
- Portaankorva-Koivisto, P. M., Laine, A. T., & Ahtee, M. (2021). Two Primary Teachers Developing their Teaching Problem-solving during Three-year In-service Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(1). <https://doi.org/10.29333/iejme/9617>
- Presmeg, N. (2014). Visualization and Learning in Mathematics Education. Teoksessa S. Lerman (toim.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 636–640). Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_161
- Schwarz, B. B., Swidan, O., Prusak, N., & Palatnik, A. (2021). Collaborative learning in mathematics classrooms: Can teachers understand progress of concurrent collaborating groups? *Computers & Education*, 165, 104151.
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2021.104151>