

Itsearviointin toteuttaminen alkuopetuksessa ja lukiossa: matematiikan tarjoamat mahdollisuudet

Susanna Toikka¹ ja Lasse Eronen²

¹ LUMA-keskus Suomi, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

² Filosofinen tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Arvioinnin painopistettä aina alkuopetuksesta lukioon asti on siirretty opetussuunnitelmien kehittämistyön myötä lopputuloksen arvioinnista koko oppimisprosessin arviointiin eli formatiiviseen arviointiin. Muutos selittyy formatiivisen arvioinnin hyödyillä; sillä on nähty olevan monia oppimista tukevia vaikutuksia. Eriyisesti matematiikan näkökulmasta formatiivisen arvioinnin on havaittu tukevan tärkeitä taitoja, kuten ajattelun taitojen syventämistä ja oman toiminnan kriittistä tarkastelua. Formatiivista arviointia voi toteuttaa monin eri keinoin, mutta opettajat ovat kuitenkin usein kokeneet sen toteuttamisen haasteelliseksi käytännön opetustyössään. Tässä artikkelissa nivotaan yhteen, mitä itsearviointi voisi tarkoittaa koulupolun eri vaiheissa. Esittelemme, miten itsearviointia voidaan toteuttaa; tarkastelumme perusteella alkuopetuksessa keskitytään vielä itsearviointin perustaan eli reflektiotaitoon, kun lukiossa syvennytään kognitiivisesti haastavampien asioiden äärelle, kuten oman toiminnan, ratkaisustrategioiden ja oppimisen tarkasteluun.

Avainsanat: formatiivinen arviointi, matematiikka, alkuopetus, lukio

Yhteystiedot: susanna.toikka@helsinki.fi

1 Arviointimuutosten pyörteissä

Yksi oppimista merkittävimmin ohjaava ja edistävä tekijä on *arviointi* (Hodgson & Pang, 2012). Siitä syystä opettajat ja arvioinnin kehittäjät ovat suunnanneet huomionsa yhä enenevässä määrin siihen, minkälaisia tavoitteita oppimiselle asetetaan ja miten tavoitteiden saavuttamista voidaan tarkastella. Matematiikan tavoitteissa korostuu oppijan kognitiivisten taitojen kehittäminen niin perusopetuksen (2014) kuin lukion (2019) opetussuunnitelmissa. Tavoitteena on, että oppija kykenee keskustelemaan matematiikasta, perustelemaan väitteitä, hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita sekä ymmärtämään, mitä hän tekee ja miksi näin tekee. Yhteenvetona voi todeta, että matematiikan opetuksen tarkoituksena on kehittää oppijan matemaattista ajatteluprosessia. Tätä varten oppija tarvitsee sellaista arviointia, joka tukee häntä syventämään ajattelun taitojaan.

Oppimisen ja osaamisen arvioinnissa on tehty kehittämistyötä peruskoulu- ja lukio-opetuksen saralla. Opetushallitus on muun muassa uusinnut perusopetuksen



opetussuunnitelman perusteiden arviointia koskevan luvun. Uusitus arviointiluvussa oppimista ohjaava ja edistävä arviointi on korostunut (Opetushallitus, 2020). Tarkoituksena on tukea oppilaiden taitoja tarkastella oppimisprosessiaan kokonaisuutena, ei vain sen lopputulosta. Tavoitteena on, että oppilas ottaa askelittain vastuuta omasta oppimisestaan ja sen ohjaamisesta kohti asetettuja tavoitteita. Vastavasti uudistuneessa lukion opetussuunnitelmassa (2019) oppimisen lopputuloksen eli summatiivisen arvioinnin rinnalla korostuu oppimisprosessin aikainen ohjaava eli *formatiivinen arviointi*. Nykyisin matematiikan kannalta arviointi tulisikin nähdä enemmän matemaattisen ajatteluprosessin osana kuin ajatteluprosessin onnistumista mittaavana toimintona (Eronen, 2019). Kokonaisuudessaan arvioinnin painotus on siirretty oppimisprosesseja tukevaan formatiiviseen arviointiin niin perusopetuksessa kuin lukiossakin.

Matematiikan formatiivista arviointia voidaan toteuttaa usein tavoin. Tässä artikkelissa rajaamme tarkastelun muutamaankin itsearviointin toteuttamisen tapaan, jotka ottavat huomioon niin alkuopetusikäisen kuin lukiolaisen erityispiirteet. Artikkelissa ensin käsittelemme matematiikan formatiivista arviointia yleisesti, jonka jälkeen keskitymme tarkastelemaan ensin itsearviointia ja myöhemmin siinä tarvittavien taitojen tukemista. Tämän jälkeen kuvaamme alkuopetusikäisten reflektiota käsittelevää tutkimustamme. Lopuksi tarjoamme lukion formatiiviseen arviointiin vaihtoehtoisen lähestymistavan Zimmermanin näkemyksiä mukaillen.

2 Matematiikan formatiivinen arviointi

Formatiivinen arviointi kohdentuu nimenomaan oppimisprosessin aikaisiin toimiin (Black & Wiliam, 2009). Sitä voidaan toteuttaa useilla eri menetelmillä, mutta keskitymme tässä artikkelissa nimenomaan *itsearviointiin* ja siinä tarvittaviin taitoihin. Syy tehdylle rajaukselle on yksinkertainen; tutkimusten mukaan itsearviointi kehittää monia matemaatikolle tärkeitä taitoja, kuten taitoa tarkastella omaa toimintaa kriittisesti (Dubinsky & Wilson, 2013; Fuchs ym., 2003; Reinholz, 2016). Arvioinnin näkökulmasta oppijan toteuttamalla itsearviointilla viitataan prosessiin, jossa oppija tarkastelee perustellen opiskeluaan ja oppimistaan havaitakseen niissä niin vahvuuksia kuin kehittämisen tarpeita (Andrade & Valtcheva, 2009).

Itsensä arviointi tukee oppimista monin keinoin (esim. Clark, 2012; Lew ym., 2010). Arvioinnin tutkija Clark (2012) huomauttaa, että itsearviointia harjoitellessa oppija oppii säätelämään oppimistaan ja arvioimaan saavuttamia tuloksia suhteessa asetettuihin tavoitteisiin. Clark tarkentaa, että nämä taidot johtavat vuorostaan

itseohjautuvaan opiskeluun, jossa oppija määrittää oppimisensa tarpeet sekä kontrolloi tavoitteiden toteutumista. Clarkin (2012) mukaan itseään arvioidessa yksilö oppii nimeämään saavutettavia tavoitteita, joiden tavoittaminen lisää motivaatiota. Vastaavasti tavoitteita saavuttaessa oppijan itseluottamus kasvaa, sillä hän osaa tunnistaa omaan oppimiseensa liittyviä vahvuuksia ja kehittämiskohteita (Clark, 2012).

Matematiikan näkökulmasta itsearviointin anti kietoutuu *reflektioidon* ympärille. Itsearviointi ja reflektio ovat vuorovaikutteisia taitoja; itsearviointin harjoittelu kehittää reflektiota, mutta toisaalta reflektiota tarvitaan onnistuneen itsearviointin toteutumiseen (Andrade & Valtcheva, 2009). Itsensä arviointi ja reflektiointi yhdessä tukevat myös matematiikan opetuksen tavoitetta kehittää oppijan matemaattista ajatteluprosessia (Opetushallitus, 2014, 2019).

Reflektio keskittyy matemaattisen ajattelun kypsymiseen ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymiseen (Reinholz, 2016). Ongelmien ratkaiseminen on paitsi merkityksellinen taito matematiikassa, myös laajemminkin elämässä. Tutkija tarkentaa, että reflektioidon kehittyminen vaikuttaa myönteisesti ongelmanratkaisutaitoon, sillä ongelmanratkaisuprosessi sisältää monia reflektiota vaativia toimintoja (Reinholz, 2016). Reflektion myötä vahvistuu myös matematiikan kannalta tärkeä taito tarkastella omaa toimintaa kriittisesti, mikä edistää kontekstin huomioivien ja tarkoituksenmukaisten ratkaisustrategioiden valitsemista sekä niiden käyttämistä käsiteltävän ongelman ratkaisemiseksi (Fuchs ym., 2003). Tällainen menettelytapa auttaa oppijaa ymmärtämään ja ohjaamaan omaa kognitiivista toimintaa (Kramarski ym., 2010).

2.1 Itsearviointi osana formatiivista arviointia

Perusopetuksen nykyisessä arviointikäytännössä oppilaita ohjataan arvioimaan itseään koulun aloittamisesta alkaen. Kuitenkin onnistunut itsearviointi vaatii niin harjoittelua kuin itsearviointitaitojen kehittämistä. Tiedetään, että itsearviointitaidot rakentuvat reflektiolle (Clarà, 2015; Donham, 2010). Siten perusteltua on aloittaa oppijoiden itsearviointitaitojen kehittäminen reflektiosta. Reflektiolla tarkoitetaan tietoisesta ajatteluprosessista, joka kohdistuu omien tunteiden, ajatusten ja kokemusten tarkastelulle (Clarà, 2015). Taito reflektoida kehittyy useiden vaiheiden kautta, mutta tutkimuksemme on osoittanut harjoittelun aloittamisen perustelluksi juuri omien tunteiden tunnistamisesta ja sanoittamisesta (Eronen & Toikka, 2021).

Näkemyksemme mukaan matematiikkaa käsittelevät aihealueet soveltuvat hyvin reflektion harjoitteluun useasta syystä. Ensinnäkin tunteiden tarkastelu on luonteva osa matematiikan opiskelua, sillä tunteiden merkitys osana matematiikan opiskelua

ja erityisesti ongelmanratkaisua on tunnistettu (Hannula, 2015). Toisekseen tutkimuksista tiedetään, että reflektion harjoittelu on suositeltavaa aloittaa aiheesta, josta oppijalla on ennestään runsaasti kokemuksia (Reinholz, 2016). Täten matematiikka luo hedelmällisiä mahdollisuuksia omien tunteiden, ajatusten ja kokemusten reflektoinnille.

Itsearviointitaitojen kehittäminen on pitkä prosessi, joten on erityisen tärkeää aloittaa kehittämisprosessi viimeistään perusopetuksen ensimmäisillä luokilla (Kearney, 2013). Täten opettajan tehtävä itsearviointitaitojen harjoittamisen mahdollistajana korostuu. Harjoittelussa tulisi huomioida erityisesti kaksi tekijää: harjoittelun systemaattisuus (Alaoutinen, 2012) ja oppijan kehitystaso (Goswami & Bryant, 2007). Erityisesti koulupolun alussa olevat oppijat tarvitsevat usein tukea itsearvioinnin harjoittelun aikana.

2.2 Itsearviointitaitojen tukeminen

Itsearviointitaitojen tukemisen lähtökohtana on oppijan kehitystaso. Usein taitojen harjaannuttaminen aloitetaan reflektiosta, sillä esimerkiksi jo tunteiden tunnistaminen ja sanoittaminen voi olla oppilaille haastavaa. Tunteiden sanoittaminen on kuitenkin ensiarvoista, koska muuten oppilaan mielen sisäiset tapahtumat ovat ulkopuoliselle tulkitsijalle epäselviä ja oppilaalle itselleen haastavia ymmärtää (Goswami & Bryant, 2007).

Oppilas saattaa tarvita reflektiota harjoitellessaan niin opettajan läsnäoloa kuin konkretiaa tunteiden tunnistus- ja kielentämisprosessin apuna. Konkretiana voi toimia tarinallisuus (Fleer, 2011) ja mielikuviutus (Duffy, 2009). Duffy (2009) luonnehtii mielikuviutuksellisuutta luontaiseksi itseilmaisun keinoksi. Lisäksi tarinoiden kuunteleminen ja kertominen on usein pienille oppijoille miellyttävä toiminnan muoto (Fleer, 2011). Erityisesti pienten oppijoiden kohdalla on tärkeää hyödyntää konkreettista välinettä, kuten *Arviointimaata* (kuva 1), reflektiutilanteessa apuna.



Kuva 1. Arviointimaa © Eero Karvonen / Sharp Dis-Chord

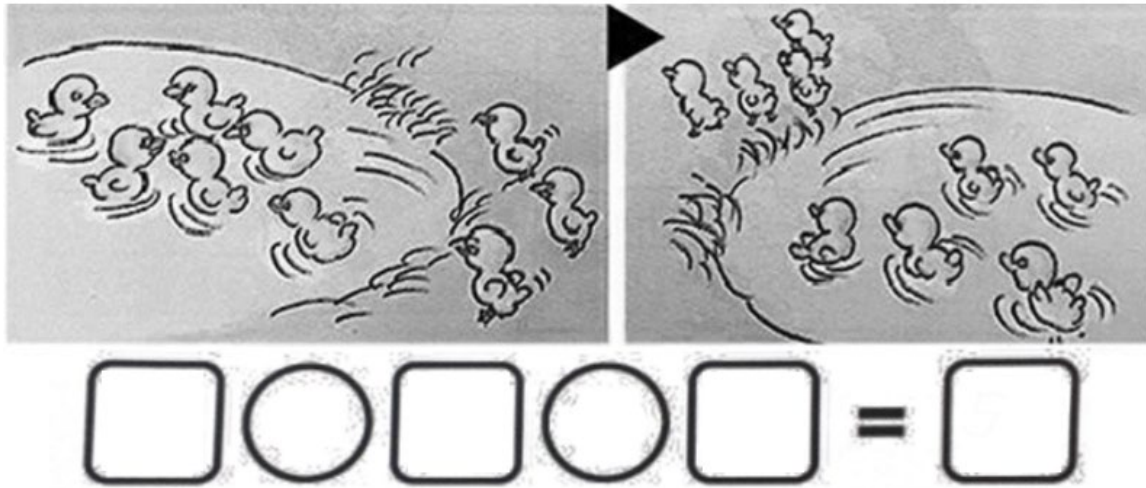
Arviointimaa on mielikuvitusmaailmaan sijoittuva, suurikokoinen kuva. Se on tarkoitettu herättämään ja kuvastamaan erilaisia tunteita ja auttamaan niiden ilmaisemisessa. Arviointimaata käytettäessä oppilas sijoittaa itsensä Arviointimaan kuvamaailmaan pienten siirrettävien merkkien avulla ja kertoo samalla tunteistaan, kokemuksistaan ja ajatuksistaan. Opettaja on tilanteessa läsnä ja voi tarvittaessa esittää oppilaalle ohjaavia kysymyksiä. Arviointimaan konkreettisuus ja kuvan mielikuvitusta ruokkiva yksityiskohtaisuus voivat tukea oppilaiden taitoa käsitellä abstrakteja ilmiöitä, kuten tunteita.

3 Alkuoppilaat refleктоimassa

Tässä luvussa perehdymme alkuopetusikäisten taitoon reflektoida perustuen jo julkaistuun tutkimukseemme (Eronen & Toikka, 2021). Tarkastelimme erään itäsuomalaisen koulun alkuopetusikäisten oppilaiden taitoa reflektoida vuoden 2019 alussa. Luokassa oli yhteensä 23 oppilasta, joista kymmenen oli ensimmäisen vuosiluokan oppilasta ja vastaavasti kolmetoista toisen vuosiluokan oppilasta.

Toteutimme vuorovaikutustilanteen, joka muodostui ongelmaratkaisutehtävän ratkaisemisesta ja sen jälkeisestä haastattelusta. Ongelmanratkaisutehtävässä vaadittiin yhteen- ja vähennyslaskutaitoja (ks. kuva 2). Aikarajoitetta tehtävän

ratkaisemiselle ei asetettu, vaan oppilaat käyttivät ongelmanratkaisutehtävän pohtimiseen tarvitsemansa ajan. Tehtävää ratkaistessaan heitä rohkaistiin kertomaan äänen ajatuksistaan ja mahdollisista ratkaisuvaihtoehdoistaan.



Kuva 2. Käytetty ongelmanratkaisutehtävä (Helsingin Sanomat, 2019). Tehtävänanto: Muodosta laskulauseke kahden kuvan muodostaman kuvasarjan perusteella sekä ratkaise muodostamasi laskulauseke.

Ongelmatehtävää seurasi puolistrukturoitu haastattelu Arviointimaata apuna käyttäen. Oppilailta esitettiin seuraavat kysymykset:

- Kerro Arviointimaan paikkoja käyttäen, miltä äskeinen ongelmanratkaisu tuntui.
- Mihin matematiikan voisi Arviointimaassa sijoittaa ja miksi?
- Miltä matematiikan opiskelu tuntuu?

Tarvittaessa oppilasta pyydettiin kuvaamaan tarkemmin vastaustaan. Esimerkiksi ongelmanratkaisun reflektoinnin yhteydessä oppilaita pyydettiin usein refleктоimaan tunteitaan tarkemmin prosessin eri vaiheissa: prosessin alussa, prosessin tekemisen aikana sekä prosessin lopuksi.

Esittelemme seuraavaksi tarkemmin oppilaiden reflektioita ongelmanratkaisun, matematiikan ja sen opiskelun näkökulmista.

3.1 Tuotetut reflektiot

Oppilaiden reflektioita tarkastellaan yksityiskohtaisemmin alkuperäisessä julkaisusamme (ks. Eronen & Toikka, 2021). Tässä artikkelissa kuvailemme ilmiötä aineistolainauksia käyttäen ilman sisällönanalyysin menetelmiin tukeutumista.

Oppilaat refleктоivat ongelmanratkaisuprosessin herättämiä tunteitaan tunneakselilla helppo–vaikea. Vaikeuden tunnetta oppilaat kuvasivat niin tehtävän alussa (n=10) kuin sen tekemisen aikana (n=4): ”Tää kuvastas [labyrintti], olin kuin labyrintissä, kun ei tienny, mitä piti tehdä” (2. luokan poika). Sen sijaan helppouden tunnetta oppilaat kuvasivat kokeneensa tehtävän ratkaisemisprosessin alussa (n=2), sen aikana (n=3) ja lopuksi (n=5), kuten 1. luokan tyttö kuvaa: ”Hmm... no missähän se ukkeli on... Tossa! Täällä niinku hämmentyneenä, miten helppo se tehtävä minusta oli”.

Mielenkiintoista on, että seitsemän oppilasta kuvasi ongelmanratkaisun aikana kokemiaan tunteita prosessin muodossa. He kuvailivat, kuinka kokivat ongelman ratkaisemisen aluksi vaikeuksia, mutta etenivät kohti helppouden tunnetta: ”Olin täs labyrintissa, koska tuntu nii vaikeelta öö... Se ol aika vaikee... Mun tavoitteena oli päästä tonne linnaa ja siinä matkan varrella oli vaikeuksii, ku piti kiivetä tonne.” (2. luokan tyttö) Nämä tunnevaihtelut kuvastavat hyvin ongelmanratkaisuprosessin luonnetta, johon liittyy tehtävän ratkaisuprosessin aikana koetut vaikeuden tunteet, jotka purkautuvat tehtävän jälkeisenä tyytyväisyytenä ja koettuina hyvän olon tunteina (Hannula, 2015).

Ongelmanratkaisun lisäksi oppilaita pyydettiin kuvaamaan, minne matematiikan voisi heidän mielestään Arviointimaassa sijoittaa. Näistä perusteluista havaitsimme hyvin monenlaisia tunnereflektioita. Vastauksia voidaan tarkastella kahden tunneakselin avulla: helppous–vaikeus ja tylsyys–kivuus. Useat oppilaat (n=10) kuvasivat vastauksessaan, millaisia tunteita matematiikan opiskelu herättää. Näissä tunnereflektioissa korostui niin helppouden kuin vaikeuden kokemuksia: ”Toi vuoren kärki, koska se tuntuu, että joskus on tuolla alhaalla, niinku ois niinku... Nyt ei mee iha hyvin laskut. Sit ku on täällä ylhäällä, ni sit tuntuu et menisi iha hyvin.” (2. luokan tyttö) Toisaalta matematiikkaa kuvattiin myös niin matematiikan asettamien vaatimusten kuin omien valmiuksien kautta: ”Hmmmh... Ehkä tänne [puuhun], ku mie pystyn mennä sinne. Pystyn kuitenkin selvittää ne tehtävät.” (1. luokan poika)

Lopuksi oppilaita pyydettiin kertomaan, miltä matematiikan opiskelu tuntuu. Oppilaiden vastauksissa oli myönteisiä ja kielteisiä tunnekuvauksia. Myönteiset tunnekuvaukset sisälsivät kivan, helppouden ja rauhallisuuden tunteita. Suurin osa oppilaista kertoi matematiikan opiskelun olevan kivaa: ”Kivalta... Missäs se on? Tossa, mäenlasku! Matikan opiskelu tuntu aina siltä.” (2. luokan poika) Sen sijaan kielteiset tunnekuvaukset kohdistuivat oppilaan epävarmuuteen omasta taidostaan ratkaista matematiikan tehtäviä: ”Hmm... No toi [kysymysmerkki], koska joskus se tuntuu, on

semmissii vaikeit tehtävii, ettei osaa, vaikka opeki neuvois.” (2. luokan tyttö) Kielteisiä kuvauksia oli yhteensä kuusi. Edellisten lisäksi oli kaksi vastausta, joissa oppilas kuvasi matematiikan opiskelun herättävän niin myönteisiä kuin kielteisiä tunteita, kuten 1. luokkalainen tyttö kuvaa: ”Välillä matikka on kivaa, mutta välillä se on niin vaikeeta, etten osaa, vaik opeki auttas.”

Reflektion harjoittelu suositellaan aloitettavaksi ilmiöstä, josta oppilaalla on ennestään paljon kokemusta (Reinholz, 2016). Matematiikka ja matemaattinen ongelmanratkaisu osoittautuivat reflektiolle sopiviksi harjoittelutilanteiksi aiempien kokemusten lisäksi siksi, että matematiikka herättää oppijoissa monenlaisia tunteita. Ongelmanratkaisutilanteella pyrittiin aktivoimaan oppilaissa tunteita, joka osaltaan teki tunteista tietoisia ja näkyviä. Toisaalta matematiikan opiskelusta tuotetut reflektiot sisälsivät rikkaampaa perustelua verrattuna matematiikkaan oppiaineena tai ongelmanratkaisuprosessiin. Matematiikan opiskelusta oppilailla on runsaasti kokemusta (Reinholz, 2016) verrattuna muihin esitettyihin kysymyksiin. Tästä syystä kysymys näyttäisi kuvaavan paremmin oppilaan ajatuksia ja olevan muita kysymyksiä helpompi reflektoitava.

3.2 Arviointimaan tuki

Tiedetään, että reflektio on prosessina haastavaa sen abstraktiuden ja kognitiivisen vaativuuden vuoksi (Clarà, 2015). Tästä syystä reflektion harjoittelussa tulisi kiinnittää erityistä huomiota oppilaan tukemiseen (Goswami & Bryant, 2007). Tässä artikkelissa esitellyt oppilashaastattelut puoltavat tutkimustuloksia siitä, että reflektio on haasteellista nuorille oppijoille. Alkuopetusikäisten reflektiotaito näyttää olevan vielä vähäsanaista tunteiden kuvausta. Kuitenkin omien tunteiden tunnistamista ja sanoittamista varten Arviointimaa näyttää olevan hyödyllinen väline.

Vastauksissa on havaittavissa, että Arviointimaa innosti alkuoppilaita reflektioimaan, mutta se myös konkretisoi abstrakteja tunteita ja siten useissa tilanteissa täsmensi reflektion sisältöä. Merkityksellistä on, että Arviointimaan konkreettisen kuvan avulla jokainen haastateltu alkuopetusikäinen oppilas pystyi havainnollistamaan omia tunteitaan.

Mielikuvitusmaailma tarjosi henkilökohtaisen kokemuksen, jota hyödyntämällä voi tunnistaa ja ilmaista omia tunteitaan sekä siten harjoitella reflektiotaitoa. Arviointimaan mielikuvitukseen perustuva narratiivisuus lisää harjoittelun mielekkyyttä. Käytännössä Arviointimaa ja sen eri paikat herättivät mielikuvia, jotka muodostuivat esimerkiksi erään kakkosluokkalaisen kertomukseksi näin: ”Olin täs labyrintissa,

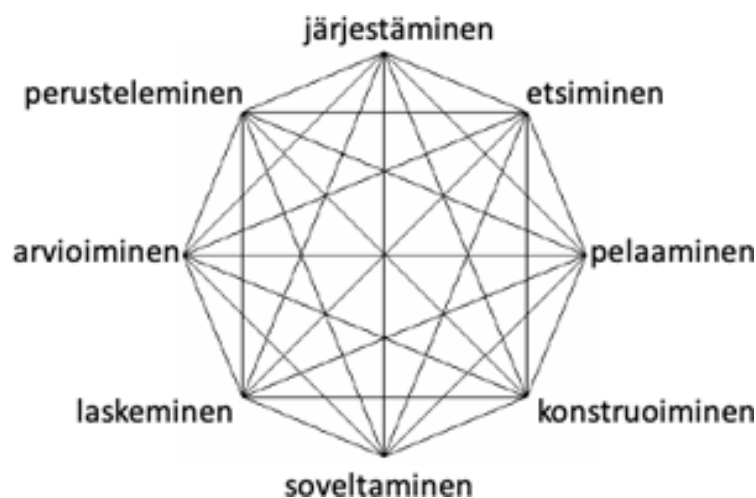
koska tuntuu nii vaikeelta... Se oli aika vaikeaa... Mun tavoitteena oli päästä tonne linnaa ja siinä matkan varrella oli vaikeuksia, kun piti kiivetä tonne [vuori]”.

Arviointimaan lähtökohtaisena ajatuksena on ollut oppilaan maailman hyödyntäminen reflektioiden tuottamisessa. Oppilaan maailma ajateltiin näyttävätyvän enemmän mielikuvitusmaailmana kuin todellisena koulumaailmana. Mielikuvitusmaailman hyödyntämisen ajateltiin innostavan oppilaan reflektion pariin, mutta myös tukevan tunteiden sanallistamista. Alkuoppilaiden vastaukset antavat viitteitä siitä, että tässä on onnistuttu. Erityisesti tunteiden kuvaaminen mielikuvitusmaailman tarjoamalla tuella näyttää edesauttavan oppilaan reflektioiden kehittymistä.

4 Arviointi matematiikan tekemisen keskeinen aktiviteetti

Seuraavaksi artikkelissa paneudutaan lukion matematiikan arviointiin, joka on perinteisesti nähty oppimisen lopputuloksen arviointina. Toisenlaisen näkökulman aiheeseen tarjoaa Bernd Zimmermann (2003); kun arviointia tarkastellaankin aktiviteettina ja prosessina, avautuu uudenlaisia mahdollisuuksia toteuttaa sitä.

Matematiikan historian tutkimusta tehneen professori Zimmermannin tavoitteena oli ymmärtää matematiikan syntyprosessia tai oikeammin sitä, miksi matematiikka on kehittynyt. Vuonna 2003 hän julkaisi artikkelin matematiikan kehittymiseen johtaneista motivaatioista sekä kahdeksasta aktiviteetista, jotka hänen mukaansa ovat vaadittu ja toisaalta riittäneet nykymuotoisen matematiikan kehittymiseen (kuva 3). Zimmermannin (2003) mukaan matematiikka kehittyy näiden *aktiviteettien verkossa*, ja näin ollen matematiikan monipuolinen harrastaminen edellyttäisikin tilanteita, joissa aktiviteetteja tulisi käytetyksi monipuolisesti.



Kuva 3. Matematiikan kehittymisen aktiviteettiverkko (Zimmermann, 2003)

Yksi aktiviteettiverkon aktiviteeteista on arviointi. Arviointi on siis matematiikan harrastamisen kannalta keskeinen aktiviteetti, joka osaltaan on ollut mahdollistamassa nykymuotoisen matematiikan kehittymisen. Aktiviteettina se täytyy kuitenkin ymmärtää hivenen arkimerkitystään laajemmin: pikemmin matemaattisen ajatteluprosessin osana kuin ajatteluprosessin onnistumista mittaavana aktiviteettina.

Arviointi on matematiikkaharrastajalle keskeinen tulosten ja päätelmien oikeellisuuden arvioinnissa. Zimmermannin (2003) mukaan arvioinnin aktiviteetti pitää sisällään yhteisöllisen arvottamisen ja sen, miten kautta historian erilaiset vallassa olleet mahdit ovat määrittäneet suotavan matematiikan harrastamisen sisällöt. Kaikessa laajuudessaan aktiviteetin kehittämisen tukeminen koulussa vaatii siis formaattivien arviointimuotojen lisäksi tiedon ja tietolähteiden luotettavuuden arviointia.

4.1 Arviointi lukiomatematiikan aktiviteettina

Lukiomatematiikassa arvioinnin monimuotoisuus on korostumassa. Nykyisin lukion arvioinnissa huomioidaan aiemmin korostuneen symbolikielen rinnalla myös muut tavat, joilla opiskelija voi tuoda esille matemaattista ajatteluaan ja sen kehittyneisyyttä (Opetushallitus, 2019). Myös lukiomatematiikassa käytettävät tehtävätyypit edellyttävät matemaattisen ajattelun joustavuutta asettamalla esimerkiksi erilaiset ratkaisumahdollisuudet vertailun kohteeksi. Tästä esimerkkinä vaikkapa kevään 2022 ylioppilaskirjoitusten tehtävä 2 niin pitkän kuin lyhyen matematiikan kirjoituksissa (Ylioppilastutkintolautakunta, 2022).

Matematiikan osaamista on myös kyky arvioida ongelmanratkaisussa käytettävien strategioiden kirjoa ja niiden käyttökelpoisuutta erilaisissa tilanteissa. Entäpä, jos lukiomatematiikan opetuksessa arviointia tarkasteltaisiinkin matematiikan harjoittamisen aktiviteettina? Miten järjestää oppilaille sellaisia matematiikan harrastamisen tilanteita, joissa heidän arviointitaitonsa kehittyisivät siten, että ne palvelisivat vahvasti myös matematiikan harjoittamista?

Yksi keskusteluissa esiin noussut näkökulma on ratkaistavaksi päätyvien tehtävien valitseminen. Opettajien kokemuksen mukaan näyttää siltä, että varsin monesti oppilaat ottavat tarkasteluun tehtävän numerojärjestyksessä tai sattumanvaraisesti. Oppilaiden olisikin hyvä tarkastella tehtävien tekemistä siitä realiteetista, ettei aika todellisuudessa tule riittämään kaikkien tarjolla olevien tehtävien tekemiseen, vaan jokainen tehtävä on valintatilanne: ”Kun valitsen tämän tehtävän, valitsen samalla pois joukon muita tehtäviä, koska aikaresurssini on rajallinen. Miksi juuri tämän

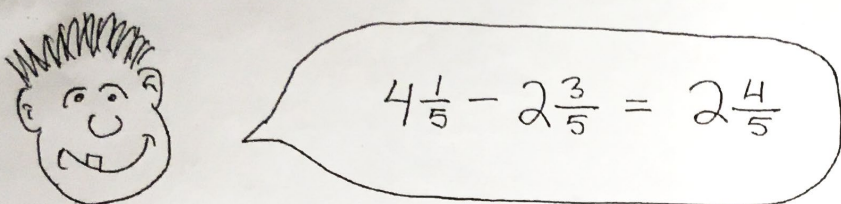
tehtävän tekeminen on minulle tärkeää?” Toisekseen arviointitaitoa ja samalla matematiikan kirjoittamisen taitoa voi kehittää niin sanotuilla *etsi virhe -tehtävätyypeillä*.

4.2 Etsi virhe -tehtävä arviointitaidon kehittäjänä

Etsi virhe -tehtävätyypin tehtävässä tarkastellaan valmiiksi ratkaistua ongelmaa ja tutkitaan päättelyn oikeellisuutta. Kuvissa 4 ja 5 on ensimmäisiä tämän artikkelin toisen kirjoittajan toteuttamia etsi virhe -tehtävätyyppejä jäljitteleviä opetuskokeiluja. Kuva 4 on vuodelta 1998, jolloin tehtävää kokeiltiin neljännen luokan oppilaiden sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskujen opiskelussa. Tehtävää käytettiin ensin oppitunneilla ja myöhemmin kokeessa (kuva 4), josta kaksi vastausesimerkkiä (kuva 5) on otettu. Vaikka tuolloin tehtävää käytettiin alakoulun opetuksessa, osoitamme tässä artikkelissa sen hyödyn myös lukio-opetuksessa.

ERIKOISTEHTÄVÄ

Opetimme Pertille samannimisten sekalukujen vähennyslaskua. Pertillä on kuitenkin huono muisti ja välillä hän unohtaa oikean tavan laskea. Viime viikolla hän ratkaisi erään tehtävän näin:



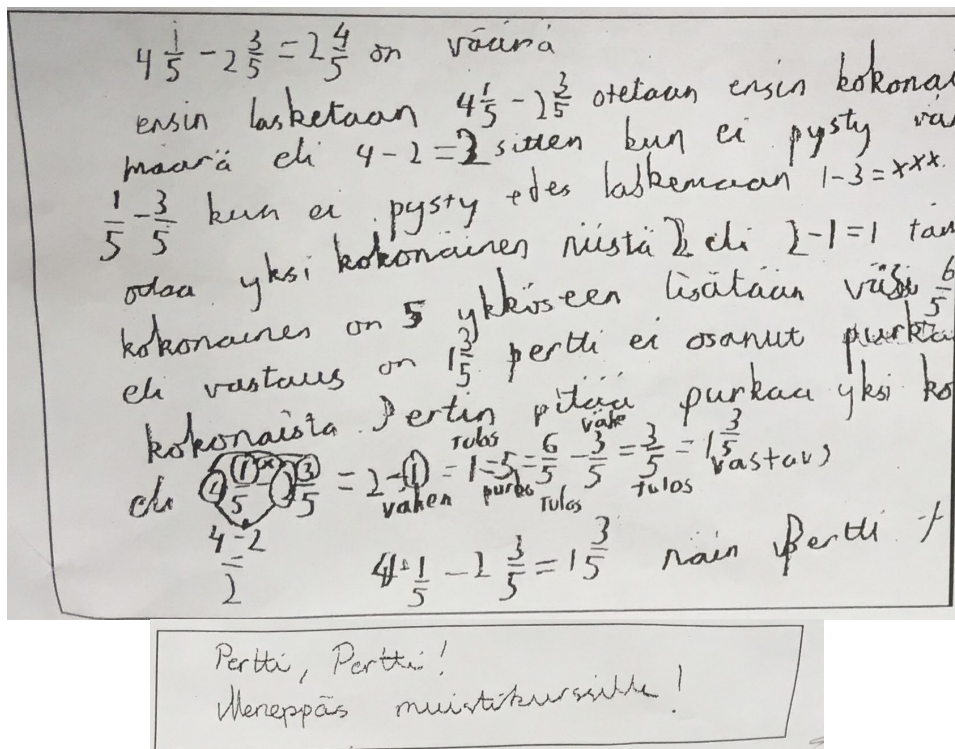
Tehtäväsi on muistuttaa Pertille, mikä oli oikea tapa laskea. Kerro hänelle, minkä virheen hän ja mikä on oikea tapa ratkaista tehtävä.

Kuva 4. Etsi virhe -tehtävä neljännen vuosiluokan kokeesta vuodelta 1998

Oppilaiden vastaukset olivat ajatuksia herättäviä. Kuvan 5 vastausesimerkkeinä on kaksi vastausta, joista yhdessä oppilas kehottaa Perttiä menemään muistikurssille ja puolestaan toisessa oppilas paneutuu varsin analyyttisesti Pertin ongelmaan. Vastaukset kertovat mielenkiintoisella tavalla sekä etsi virhe -tehtävän tuottamasta emotionaalisesta tuesta kuin toisaalta myös siitä, millainen kuva koulumatematiikasta välittyi 4. luokan oppilaalle ainakin vuonna 1998. Pidempi virhettä tarkasteleva vastaus kuului oppilaalle, jolla oli vaikeuksia matematiikan opiskelussa:

“ $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2\frac{4}{5}$ on väärä. Ensin lasketaan $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}$. otetaan ensin kokonaismäärä eli $4 - 2 = 2$. Sitten kun ei pysty $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$ kun ei pysty edes laskemaan $1 - 3 = xxx$ otetaan yksi kokonainen niistä 2 eli $2 - 1 = 1$. Tässä kokonainen on 5 ykköseen lisätään viisi $\frac{6}{5}$ eli vastaus on $1\frac{3}{5}$. Pertti ei osannut purkaa kokonaista. Pertin pitää purkaa yksi kokonainen eli $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2 - 1$ (vähenee) $= 1 - 5$ (putoo) $= \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$ (tulos) $= 1\frac{3}{5}$ (vastaus). Näin Pertti.”

Tästä kokeesta hän sai arvosanan 7, mikä oli menestys aikaisempaan. Sitä vastoin toinen lyhyt muistikurssille kannustava vastaus ”Pertti, Pertti! Meneppäs muistikurssille!” kuului oppilaalle, jonka matematiikan arvosana oli 10. Vastauksen perusteella näyttäytyi, että ulkoa-opettelu oli ollut avain menestykseen koulumatematiikassa.



Kuva 5. Kahden neljännen luokan oppilaan vastaukset koetehtävään. Ylempi vastaus on oppilaan, jolle matematiikan opiskelu oli haasteellista. Vastaavasti alempi vastaus on niin sanotun ”kympin oppilaan”.

Jo ensimmäisten opetuskokeilujen aikaan syntyi ajatus tehtävän tuomasta *emotionaalista tuesta* omien virheiden tarkastelulle. Kun tarkastelun kohteeksi otetaan yleisesti tehtävä virhe tai matemaattisen esityksen puutteellisuus (kuten ylioppilaskirjoituksiin valmistautumisessa myöhemmin tätä tehtävää on käytetty), oppilas voi ryhmän tukemana peilata omaa käsitystään asiasta ja näin kehittää omaa ajattelua.

Järjestimme lukion 2. vuosiluokan opiskelijoille (n=88) mahdollisuuden vertailla etsi virhe -tyypin tehtävän mieluisuutta verrattuna kahteen toisenlaiseen tehtävään, joista toisessa mitattiin algoritmin hallintaa perinteisessä laskutehtävässä ja toinen oli sanallinen tehtävä, jonka suorittaminen edellytti käsitteen soveltamista (Eronen ym., 2021). Tehtävien aihealueena oli yhtälöparin ratkaisu ja kohderyhmä koostui erään lukion pitkän matematiikan analyttisen geometrian kurssille (vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteiden kurssi MAA5; vastaa nykyisessä vuoden 2019 opetussuunnitelmassa kurssin MAA4 sisältöjä) osallistuneista opiskelijoista. Opiskelijoita pyydettiin arvioimaan erilaisten tehtävien ominaisuuksia ja omaa osaamistaan kouluarvosanoin. Tutkimus paljasti, että alle kahdeksalle opiskelijalle mieluisin tehtävä oli laskutehtävä ja vastaavasti epämieluisin sanallinen tehtävä. Sen sijaan yli kahdeksan opiskelijaa suosi näitä tehtäviä päinvastaisesti. Etsi virhe -tehtävä yhdisti eri osaamistason opiskelijoita. Sitä pidettiin kiinnostavana erilaisuutensa vuoksi, mutta toisaalta myös helpommin ymmärrettävänä ja opettavaisempana kuin sanallista tehtävää.

Artikkelin toisen kirjoittajan meneillään olevissa muissa tutkimuksissa etsi virhe -tehtävien soveltuvuutta on tutkittu niin luokanopettajaopiskelijoiden matematiikan opiskelussa kuin yliopistomatematiikan aineopinnoissakin. Luokanopettajaopiskelijoiden osalta etsi virhe -tehtävät edesauttavat käsitteellistä osaamista edellyttävien tehtävien tekemisestä suoriutumista, mikä näkyy selvästi pienempänä tehtävän tekemisen keskeyttäneiden määränä verrattuna muiden tehtävätyyppien opiskeluun. Vastaavasti matematiikan pääaineopiskelijoiden reaalianalyysin opintojaksolla opiskelijat kokivat etsi virhe -tehtävät vaikeiksi, mutta opettavaisiksi, ja ennen kaikkea matematiikasta keskustelua edesauttaviksi tehtäviksi.

”Opiskelijoiden kokemuksen mukaan tämä jälkimmäinen arviointivaihe osoitautui jopa ratkaisuvaihetta huomattavasti opettavaisemmaksi. Opiskelijat huomasivat, mihin muistisääntöjä voi hyödyntää ja erityisesti, että matematiikalla saatiin tehtävä helpommaksi.” (Eronen, 2019.)

Yllä oleva lainaus on lukion arviointiin kohdistuneen LUMATIKKA-koulutukseen osallistuneelta opettajalta. Koulutuksessa opettajat sovelsivat etsi virhe -tehtävätyyppejä. Opettajat antoivat omille lukion matematiikan opiskelijaryhmilleen (2–3 opiskelijaa ryhmässä) tarkasteltavaksi täysin anonymisoituja toisten oppilasryhmien ratkaisuja. Ryhmien tehtävänä oli siis tarkastella ratkaisun oikeellisuutta ja perustelujen riittävyttä. Opettajien keräämä opiskelijapalaute tehtävästä tuotti rohkaisevan kuvan tehtävän toimivuudesta arviointiaktiiviteetin kehittäjänä.

5 Opettaja mahdollistamassa

Matematiikka tarjoaa formatiiviselle arvioinnille moninaisia ja antoisia mahdollisuuksia. Se, millaisin menetelmin ja keinoin formatiivista arviointia toteuttaa, riippuu monestakin tekijästä. Merkityksellisintä on kuitenkin toteuttaa formatiivista arviointia monipuolisin ja oppijoita innostavin keinoin, sillä näin parhaiten tuetaan oppimista ja tavoitteiden saavuttamista.

Opetussuunnitelmien perusteet (Opetushallitus, 2014, 2019) ohjaavat opettajia tukemaan oppijoiden matemaattisia ajattelun taitoja läpi koulupolun. Näiden taitojen tukeminen mahdollistuu erityisesti formatiivisen arvioinnin keinoilla. Tällöin opettajan vastuuta kyseisten taitojen harjoittelun mahdollistajana on korostettava. Jotta ajattelun taidot kehittyvät, on niitä tuettava monipuolisilla keinoilla systemaattisesti. Käytännössä haasteelliseksi on kuitenkin osoittautunut, miten kyseisiä taitoja harjaannuttaa.

Artikkelissa esittelemämme tutkimukset ja omakohtaiset kokemukset antavat viitteitä siitä, että läpi koulupolun toteutettavassa ajattelun taitojen harjaannuttamisessa tulisi huomioida 1) välineen tuki (kuten Arviointimaan käyttö) ja 2) menetelmällinen tuki (kuten etsi virhe -tehtävätyyppi). Niin välineelle kuin menetelmälle yhteistä on sisältö; Arviointimaassa merkityksellistä on se, millaisin kysymyksiin oppilasta pyydetään refleктоimaan ja vastaavasti etsi virhe -tehtävissä merkityksellistä on, millaista matemaattista sisältöä tehtävä harjaannuttaa. Toivomme, että tämä artikkeli vastasi joihinkin formatiivista arviointia käsitteleviin kysymyksiin ja havainnollisti formatiivista arviointia koulupolun eri asteilla sekä siten tukee opettajia käytännön työssään. Ikäkausikohtaiset LUMATIKA 2 -kurssit tarjoavat lisää käytännönläheistä tietoa matematiikan arvioinnista.

Lähteet

- Alaoutinen, S. (2012). Evaluating the effect of learning style and student background on self-assessment accuracy. *Computer Science Education*, 22(2), 175–198. <https://doi.org/10.1080/08993408.2012.692924>
- Andrade, H., & Valtcheva, A. (2009). Promoting learning and achievement through self-assessment. *Theory Into Practice*, 48(1), 12–19. <https://doi.org/10.1080/00405840802577544>
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- Clarà, M. (2015). What is reflection? Looking for clarity in an ambiguous notion. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 261–271. <https://doi.org/10.1177/0022487114552028>

- Clark, I. (2012). Formative assessment: Assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, 24(2), 205–249. <https://doi.org/10.1007/s10648-011-9191-6>
- Donham, J. (2010). Creating personal learning through self-assessment. *Teacher Librarian*, 37(3), 14–21.
- Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83–101. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.001>
- Duffy, B. (2009). *Supporting creativity and imagination in the early years*. Open University Press.
- Eronen, L. (2019, lokakuuta 7). Arviointi ja lukiomatematiikka. *Dimensiolehti*. Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti. <https://dimensiolehti.fi/arviointi-ja-lukiomatematiikka/>
- Eronen, L., & Toikka, S. (2021). Alkuopetusikäisen valmius reflektoida matemaattisessa ongelmanratkaisutilanteessa. *FMSERA Journal*, 4(1), 1–15.
- Eronen, L., Viholainen, A., & Kolström, M. (2021). Matematiikan opiskelumotiivien yhteys itse valittujen tehtävien tiedonalapainotukseen. *FMSERA Journal*, 4(1), 75–89.
- Fleer, M. (2011). 'Conceptual play': Foregrounding imagination and cognition during concept formation in early years education. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 12(3), 224–240. <https://doi.org/10.2304/ciec.2011.12.3.224>
- Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade student' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, 95(2), 306–315.
- Goswami, U. C., & Bryant, P. (2007). Children's cognitive development and learning. *Primary Review, University of Cambridge Faculty of Education*.
- Hannula, M. (2015). *Emotions in problem solving*. Teoksessa Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (s. 269–288). Springer.
- Helsingin Sanomat. (2019, heinäkuuta 1). Osaatko ratkoa nämä Kiinan kuusivuotiaiden matematiikan tehtävät? <https://www.hs.fi/ulkomaat/art-2000005955375.html>
- Hodgson, P., & Pang, M. Y. C. (2012). Effective formative e-assessment of student learning: A study on a statistics course. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 37(2), 215–225. <https://doi.org/10.1080/02602938.2010.523818>
- Kearney, S. (2013). Improving engagement: The use of 'authentic self-and peer-assessment for learning' to enhance the student learning experience. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 38(7), 875–891. <https://doi.org/10.1080/02602938.2012.751963>
- Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM*, 42(2), 179–193. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0202-8>
- Lew, M. D. N., Alwis, W. A. M., & Schmidt, H. G. (2010). Accuracy of students' self-assessment and their beliefs about its utility. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 35(2), 135–156. <https://doi.org/10.1080/02602930802687737>
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014:96. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf
- Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Määräykset ja ohjeet 2019:2a. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Opetushallitus. (2020). *Oppilaan oppimisen ja osaamisen arviointi perusopetuksessa*. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 muutokset. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen-arviointiluku-10-2-2020_1.pdf

Reinholz, D. (2016). The assessment cycle: A model for learning through peer assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 41(2), 301–315.
<https://doi.org/10.1080/02602938.2015.1008982>

Ylioppilastutkintolautakunta. (2022). *Matematiikan ylioppilastehtävät*.
<https://info.ylioppilastutkinto.fi/2022K/df02083e9afe4d14ad8ac5594262d98b/index.html>

Zimmerman, B. (2003). *On the genesis of mathematics and mathematical thinking – a network of motives and activities drawn from the history of mathematics*. Teoksessa *Towards Meaningful Mathematics and Science Education* (s. 29–47).