LUMAT

LUMATIKKA-ohjelman matematiikan opetuksen teemanumero

LUMATIKKA

OPETUSHALLITUS RAHOITTAA HANKETTA

LUMAT-B / 7(2) 2022

Sisällys

Pääkirjoitus: Johdatus matematiikkainnostusta nostattavaan LUMATIKKA-ohjelmaan

Alisa Uusi-Kilponen, Eveliina Hietakymi ja Susanna Toikka

LUMA-keskus Suomi, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

Tiivistelmä: LUMATIKKA on vuosina 2018–2022 LUMA-keskus Suomen toteuttama ja Opetushallituksen rahoittama verkkotäydennyskoulutusohjelma matematiikan parissa työskenteleville varhaiskasvatuksen, esiopetuksen, perusopetuksen ja toisen asteen opettajille. Ohjelman oppijalähtöiset, toiminnalliset, konkreettiset ja innostavat sisällöt ovat tavoittaneet tuhansia opettajia ympäri Suomea tukien opetuksen kehitystyötä viimeisimpien opetussuunnitelmien mukaisesti. LUMATIKKA-teemanumeron tarkoituksena on havainnollistaa, mistä täydennyskoulutuksessa on kyse. Pääkirjoituksessa kuvataan tätä esittelemällä hankkeen matkaa sen alkujuurilta tähän päivään ja tulevaisuuteen. Aluksi taustoitetaan laajemmassa valtakunnallisessa mittakaavassa sitä, miten hanke on saanut alkunsa ja verkkoympäristössä toteutettava matematiikan täydennyskoulutus muotoutunut sellaiseksi kuin se on. Ikkunan koulutusosioiden sisältöihin ja pedagogiikkaan tarjoaa kirjoituksen toinen luku sekä teemanumeron muut artikkelit, joita pohjustetaan samassa luvussa. Vaikka hanke päättyy vuoteen 2022, LUMA-keskus Suomi pyrkii jatkossakin vastaamaan olemassa olevaan tarpeeseen kehittää matematiikan opetusta ja tukea sen oppimista – tulevaisuutta hankkeen päättymisen jälkeen kirkastetaan pääkirjoituksen päätteeksi.

Avainsanat: matematiikan opetus, matematiikan täydennyskoulutus, jatkuva oppiminen, MOOC-verkkokoulutus

Yhteystiedot: info@lumatikka.luma.fi

1 Kohti innostavaa ja oppijalähtöistä matematiikan opetusta ja oppimista täydennyskoulutuksen keinoin

Tässä pääkirjoituksen aloitusluvussa havainnollistetaan LUMATIKKA-ohjelman alkuaskeleita. Ensin kerrotaan siitä, millaisen yhteiskuntapoliittisen tilanteen viitoittamana innostava ja oppijalähtöinen matematiikan täydennyskoulutus nousi merkitykselliseksi ja tarpeelliseksi tekijäksi kentällä oleville opettajille koulutusjatkumon takaamiseksi. Tämän jälkeen valotetaan, miten ja millä voimin tavoitetta tarjota innostavaa ja kallisarvoista matematiikan opetusta Suomen joka kolkassa ja niemessä lähdettiin täyttämään, monimuotokokeilujen kautta, täysin verkon välityksellä tapahtuvalla koulutuksella.

1.1 Matematiikan opettamisen ja oppimisen haasteisiin vastaaminen koulutuspolitiikan kentällä

Suomalainen koulutus on käsite, jonka laadukkuutta on arvostettu kansainvälisesti siitä lähtien, kun ensimmäiset PISA-tulokset julkaistiin (ks. Kupari & Välijärvi, 2005; Välijärvi & Linnakylä, 2002). 2000-luvulta alkaen erilaisten tutkimusten, kuten PISA-, pitkittäis- ja TIMMS-tulokset ovat kuitenkin maalanneet tuohon kiiltokuvaan synkkää pilveä (Hannula, 2018; Uusi-Kilponen, 2021b; Vettenranta ym., 2020ab). Viimeksi asia nousi joulun 2021 alla jälleen polttavaksi puheenaiheeksi kohisuttaen opetusalaa ja mediaa, kun Kansallinen koulutuksen arviointikeskus Karvi julkaisi kartoitukset suomalaisoppilaiden matematiikan osaamisen ja asennekehityksen eriytymisestä sekä laskusuhdanteen jatkumosta (Metsämuuronen & Nousiainen, 2021). Osaamisen lasku on jatkunut vuosituhannen vaihtumisesta lähtien näihin päiviin (Aksela & Lehto, 2019; Hannula, 2018; Metsämuuronen & Nousiainen, 2021; Uusi-Kilponen, 2021b; Vettenranta ym., 2020ab). Tutkimusten valossa voisi kysyä, mitä on tehty matematiikan oppimisen tueksi?

Vastausta on syytä etsiä perehtymällä hieman suomalaisen opetuksen ja opettajankoulutusjatkumon kehittämishankkeiden vaiheisiin, jotka ovat muotoutuneet vuosituhannen vaihteesta lähtien erilaisin keinoin (ks. Uusi-Kilponen, 2021a, s. 17–19). Vuonna 2007 Opetusministeriö muun muassa korosti selvityksessään, että opettajien koulutusjatkumo tuli saada vuoteen 2020 mennessä yhtenäistettyä yhteistyössä yliopistojen, muiden alan toimijoiden sekä organisaation työnantajien ja opetushenkilöiden kesken. Erityismainintana selvityksessä nostettiin lisäksi esille, että täydennyskoulutuksen merkitystä ja resursseja oli syytä terävöittää. 2010-luvulla koulutuspolitiikan päämääräksi lanseerattiin koulutus- ja osaamistason nostaminen: Sipilän hallituksen Osaaminen ja koulutus -kärkihankkeen kunnianhimoisiksi tavoitteiksi asetettiin, että Suomi olisi koulutuksen, osaamisen ja modernin oppimisen kärjessä, ja sen opettajat olisivat maailman osaavimpia (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2019).

Samoihin aikoihin, kun osaamisen laskusuhdanne ja innottomuus matemaattisia aloja kohtaan oli selkeästi jo näkyvissä, ponnisti Opetus- ja kulttuuriministeriön rahoituksella LUMA-keskus Suomi -verkoston kehittämisohjelma *LUMA Suomi* vastaamaan tavoitteisiin edistää yhteisöllisesti ja uusimpaan tutkimustietoon perustuen matematiikan, teknologian sekä luonnontieteiden osaamista, opetusta ja oppimista (Aksela & Lehto, 2019). Ohjelman erinomaisten tulosten ja toteutuneiden päämäärien myötä LUMA-keskus Suomi on viime vuosina juurtunut yhä vankemmin osaksi tiede- ja opetusyhteisöä. Verkoston erityispiirteenä voidaan nähdä sen muodostama yhteys yliopiston ja opettajankoulutuksen sekä ruohonjuuritasolla tapahtuvan eri asteiden opetustoiminnan välille, edistäen yhteisöllistä sekä matemaattisten aineiden oppimisintoa tukevaa asiantuntevaa ja tutkimusperustaista opetuskulttuuria.

LUMA Suomi -kehittämisohjelman myötä hioutuneista kokemuksista jalostui yhdeksi verkoston ohjelmaksi *LUMATIKKA*-hanke (Aksela & Lehto, 2019, s. 34). LUMATIKKA on vuonna 2018 käynnistynyt matematiikan opetuksen ja oppimisen täydennyskoulutusohjelma suomen- ja ruotsinkielisille opettajille. Hankkeessa on kehitetty ja ylläpidetty verkkokoulutuskokonaisuutta, joka on suunnattu varhaiskasvatuksen, esiopetuksen, perusopetuksen ja toisen asteen opetus- ja kasvatushenkilöstölle. Lisäksi täydennyskoulutuksen sisällöt on avattu näiden asteiden opettajiksi opiskeleville. Maksuton valtakunnallinen koulutusohjelma luotiin kahdeksan yliopiston ja ammattikorkeakoulun yhteistyönä viimeisimpiin tutkimustuloksiin tukeutuen, myötäillen siis opettajankoulutusjatkumon, koulutuspolitiikan ja tutkimustulosten valossa nousseita tavoitteita tukea opettajia tärkeässä tehtävässään innostaa oppijoita oppimaan ja ymmärtämään matematiikkaa (Hietakymi & Aksela, 2020, s. 105). Osallistujamäärien ja -palautteiden pohjalta onkin havaittava koulutuksen merkityksellisyys opettajille. Kurssit ovat saavuttaneet selvää tunnettavuutta ja suosiota koulutuskentällä toimivien opettajien ja toimijoiden parissa.

Mikä on ollut LUMATIKKA-kurssien suosion takana? Miten osaltamme olemme tukeneet tavoitetta tarjota innostavaa ja laadukasta matematiikan opetusta Suomen joka kolkassa ja niemessä? Tässä teemanumeron pääkirjoituksessa kuvataan seuraavaksi tarkemmin, mistä rakennuspalikoista kokonaisuutta lähdettiin rakentamaan.

1.2 LUMATIKKA-hankkeen mahdollistajat

Opettajankoulutusjatkumon kehittämishankkeiden tiimellyksessä Opetushallitus avasi loppuvuodesta 2017 lisähaun opetus- ja varhaiskasvatustoimen henkilöstökoulutuksen valtionavustuksiin. Taustalla oli esille nousseet arvioinnit siitä, että suomalainen täydennyskoulutuskenttä oli jo tovin vaikuttanut pirstaleiselta, yksittäisten ja toisistaan irrallisten kurssien kokoelmilta (ks. Opetusministeriö, 2007). Valtionavustuksella lähdettiin tukemaan osaltaan matematiikan osaamisen ja johtamisosaamisen kehittämistä systemaattisemmin, 15 opintopisteen laajuisin opintokokonaisuuksin.

Matematiikan opetuksen ja oppimisen täydennyskoulutushankkeiden tuli avustuksen määräysten mukaisesti toteuttaa *MOOC*-verkkokurssiympäristö (*Massive Open Online Course*), joka jäisi avustuskauden jälkeen käytettäväksi itsenäiseen opiskeluun. Tarkoituksena tässä oli varmistaa opetus- ja kasvatustoimen henkilöstölle yhtäläiset mahdollisuudet kehittää ammatillista osaamistaan maantieteellisestä sijainnista riippumatta. Opetushallitus oli lisäksi asettanut koulutushankkeille tavoitteeksi opettajien matematiikan opettamisen taitojen monipuolistumisen ja kehittymisen sekä matematiikan oppimistulosten nousuun kääntymisen kaikilla opetusasteilla (vrt. edellisessä luvussa mainitut PISA- ja TIMMS-tulokset). Yhtenä tavoitteena mainittiin myös varhaiskasvatuksessa matemaattisen ajattelun taitojen entistä parempi kehitys. Avustusta myönnettäessä merkittävänä pidettiin materiaalien avointa jakamista ja asiantuntijuuden kehittämistä koulutuksen kantavana teemana.

LUMA-keskus Suomi -verkostoon kuuluvat Aalto-yliopisto, Helsingin yliopisto, Itä-Suomen yliopisto, Oulun yliopisto, Tampereen yliopisto ja Åbo Akademi sekä yhteistyötahoina Tampereen ammattikorkeakoulu, Oulun ammattikorkeakoulu ja Helsingin yliopiston koulutus- ja kehittämispalvelut HY+ Oy tarttuivat edellä mainitun valtionavustuksen turvin matematiikan opetuksen ja oppimisen täydennyskoulutusohjelman toteuttamiseen. Koulutusohjelma sai nimekseen LUMATIKKA, viitaten sanoihin “LUMA” ja “matikka”. Ohjelman johtajaksi tuli Helsingin yliopiston luonnontieteellisen tiedekasvatuksen professori Maija Aksela, jolla on kymmenien vuosien kokemus opettajien täydennyskoulutusten toteuttamisesta LUMA-aineissa.

LUMATIKKA-hankkeen lisäksi avustus myönnettiin yhtä aikaa kahdelle matematiikan täydennyskoulutushankkeelle, joita olivat Turun yliopiston koordinoima *Joustavaan matematiikkaan eli JoMa* (ruotsiksi *Flexibel matematik eli FlexMa*) sekä Oulun yliopiston *Konkretiaa ja vaikuttavuutta matematiikan opetukseen.* Päällekkäisyyksien välttämiseksi hankkeet ovat tehneet keskenään yhteistyötä muun muassa 15 opintopisteen koulutuskokonaisuuksien suunnittelussa ja verkkoympäristöjen teknisten ominaisuuksien vertailussa sekä koulutusohjelmien markkinoinnissa.

Myöhemmin Opetushallitus avasi vuoden 2017 lisähaussa avustusta saaneille hankkeille erillishaun vuonna 2019 (Opetushallitus, 2019). LUMATIKKA-ohjelma sai tämän jatkoavustuksen myötä mahdollisuuden toimia vuoden 2022 päättymiseen asti opettajien täydennyskoulutuksena. Toisella avustuskaudella Lumatikkaa ovat toteuttaneet samat hankepartnerit Oulun ammattikorkeakoulua lukuun ottamatta.

1.3 Tutkivan oppimisen myötä monimuoto-pilotoinneista oppimisanalytiikkaa hyödyntäväksi verkkokoulutukseksi

Edellä kuvattujen vaatimusten mukaisesti keväällä 2018 LUMATIKKA-täydennyskoulutuskokonaisuutta lähdettiin rakentamaan Helsingin yliopiston *Moodlerooms*-pohjaiselle MOOC-alustalle, minne kenen tahansa oli mahdollista rekisteröityä sähköpostiosoitteella tai *HAKA-tunnuksin*. Verkko-opintokokonaisuuden koordinointi ostettiin Helsingin yliopiston koulutus- ja kehittämispalveluilta (HY+ Oy). Verkkopedagogiikan asiantuntijan johdattamana hankkeeseen kiinnitetyt matematiikan, luonnontieteiden ja ohjelmoinnin opetuksen, tutkimuksen ja kehittämisen asiantuntijat suomalaisista korkeakouluista suunnittelivat ja toteuttivat satoja uusia oppisisältöjä, kuten opetusvideoita ja kirjallisia materiaaleja, jotka koostettiin mielekkäiksi kurssikokonaisuuksiksi. Opetusmateriaalien korkea ja tasainen laatu varmistettiin ostamalla videoiden kuvaus- ja editointipalvelut Unigrafialta, kieliversioiden käännöstyö Åbo Akademin kääntäjältä sekä kuvitus- ja taittopalveluita graafikolta. LUMATIKKA on sen myötä muotoutunut molempine kotimaisine kieliversioineen yhteensä 21 verkkokurssin laajuiseksi ohjelmaksi, jonka sisältöjä kuvataan myöhemmin tässä kirjoituksessa – ja niin ikään tarkemmin teemanumeron muissa artikkeleissa.

Vuoden 2018 syksystä alkaen pidettyjä koulutusohjelman kursseja pilotoitiin aluksi *monimuoto-opintoina* verkko- ja lähiopintojen yhdistelmänä. Helsingissä, Oulussa ja Tampereella pidettyjen lähiopintojen tarkoituksena oli toimia kehittämisvaiheessa olleiden kurssien kohtaamiskanavana, missä osallistuneilta opettajilta oli mahdollista kerätä palautetta verkkokursseille suunniteltujen materiaalien soveltuvuudesta opetukseen. Kuvassa 1 on Oulun lähikoulutuspäivään osallistuneita opettajia. Hankkeen edetessä ensimmäisellä rahoituskaudella lähiopetuksen määrää pystyttiin palautteiden kartuttua vähentämään ja lopulta lopettamaan. Nykyisellään tarjolla olevat kurssit on pitkään toteutettu täysin verkossa mahdollistaen koulutuksen kaikkien saataville maantieteellisestä sijainnista tai ajankohdasta riippumatta.

Kuva 1. Opettajat tekevät lähipäivässä ryhmätöitä verkkokurssille kuvatun videon pohjalta.
(CC BY-SA 4.0 Mika Koponen)

Verkkokurssien sisältöjä ja toiminnallisuuksia on jatkuvasti hankkeen edetessä kehitetty entistä toimivimmiksi lähipäiväosallistujien kokemusten lisäksi verkko-osallistujilta saadun palautteen sekä kouluttajien omien parannusehdotusten perusteella. Yksi kurssitoteutus on kestänyt aina yhden lukukauden, jonka jälkeen kullekin kurssille on avattu uudella kaudella uusi oppimisalusta, johon havaitut kehitystarpeet on päivitetty. Parhaimmillaan niin sanotun ”kehitysiteraation” on hankkeen aikana ennättänyt läpikäymään kahdeksasti ensimmäisenä toteutettu LUMATIKKA-kurssi *Matematiikan polulla varhaiskasvatuksesta toiselle asteelle*. Tältä koulutuskokonaisuuden avaavalta kurssiosuudelta on kerätty arvokasta kokemusta myös muiden ohjelman kurssien suunnitteluun.

Osallistujilta saadun varsinaisen palautteen lisäksi sisältöjä ja toiminnallisuuksia on kehitetty kolmiosaisen kyselytutkimuksen avulla (ks. Löfström ym., 2021). Kyselytutkimuksen yhteydessä on seurattu lisäksi kurssiympäristöille kertynyttä oppimisanalytiikkaa, kuten lokitietoja ja kurssisuorituksia (ks. Koponen ym., 2021). Näin on saatu tietoa osallistujien käyttäytymisestä verkkoympäristössä; esimerkiksi kuinka kauan keskimäärin yhdellä kerralla opintoihin käytetään aikaa tai mitkä ovat kurssilla sellaisia kohtia, joissa opiskelu todennäköisimmin keskeytyy. Lisäksi kaikkien aktiviteettien suorittaminen ja niiden arviointi on sidottu osaksi MOOC:n monipuolista automatiikkaa, mikä on mahdollistanut mutkattomamman edistymisen seurannan sekä siihen liitettyjen kurssitodistuksen ja osaamismerkkien kytkennät kurssilaisille.

Oppimisanalytiikan välinein (Koponen ym., 2021) on huomattu myös se, että LUMATIKKA-kursseilla toisintuu selvästi kansainvälisissä MOOC-tutkimuksissa (esim. Nilsen, 2019; Hill, 2013) havaittu *kurssipudokkuus* kurssin edetessä. Koposen tutkimusryhmän (2020) mukaan enemmistö (60 %) tutkimukseen osallistuneista opettajista (n=125) mainitsee kiireen syyksi olla suorittamatta LUMATIKKA-koulutusta kokonaan ja siirtää koulutuksessa opittua opetustyöhön. Kurssipudokkuuden minimoimiseen on pyritty vastaamaan tarjoamalla osallistujille kohdistetumpia tukitoimia kurssiohjaajien toimesta sekä ohjeellisia, mutta joustavia suoritusaikatauluja, opintojen edistymisen tueksi.

Voitaneen sanoa, että hankkeen korkeakoulutoimijoiden sekä osallistujien yhteistyön tuloksena on muotoutunut hankkeen keskeisin näkyvä kädenjälki – pitkälle vietyä oppimisanalytiikkaa edistymisen seurannan ja arvioinnin välineenä hyödyntävä verkkokurssien kokonaisuus, jota kuvataan nykyisessä muodossaan luvussa 2.

2 Koulutusohjelman kuvaus

Tässä luvussa lukijalle avataan LUMATIKKA-ohjelman sisältöjä ja rakennetta. Ensin kuvataan, miten ohjelman sisällöt pohjautuvat tutkimusperusteisesti aiempiin tutkimuksiin matemaattisten taitojen ja asenteiden kehittymisestä varhaislapsuudesta nuoruuteen. Sitten tarkastellaan verkkokurssikokonaisuuden rakennetta. Lopuksi pohjustetaan koulutuksen sisältöjä katsauksella teemanumeron muihin artikkeleihin.

2.1 Matikkainnostusta herättävät sisällöt ja työtavat

Jo ennen kouluikää lapselle kehittyvien matemaattisten taitojen on todettu olevan yhteydessä matematiikan oppimiseen myöhemmällä iällä (ks. Aunio, 2008). Aunion esittelemien tutkimusten mukaan 5–6-vuotiaana todetut heikot matemaattiset taidot ennakoivat todennäköisiä vaikeuksia myös koulumatematiikan oppimisessa. Samoissa tutkimuksissa on osoitettu, että luokka-asteelta toiselle siirryttäessä osaamiserot matematiikkaa hyvin ja heikosti osaavien välillä kasvavat entisestään. Tästä syystä on merkityksellistä, että laadukkaalla matematiikan opetuksella pystytään vaikuttamaan taitoeroihin niitä kaventaen jo varhaiskasvatuksesta lähtien.

Näitä tutkimustuloksia vasten on ilmeistä, että Opetushallitus on nostanut varhaiskasvatuksen matemaattisten taitojen tukemisen keskiöön avustusta saaneiden hankkeiden tavoitteissa. Myös varhaiskasvatuksen kentällä matematiikanopetuksen täydennyskoulutus on ollut kaivattu lisä koulutustarjontaan hankkeellemme kantautuneen palautteen perusteella. Koulutus on vahvistanut osallistujien kykyä auttaa oppijoitaan havainnoimaan ympäristöään "matikkalasien" läpi heti varhaisista vuosista lähtien.

Toisaalta tutkimus matematiikkaan kohdistuvista affektiivisista tekijöistä (Tuohilampi, 2016) viittaa siihen, että oppilaiden kuva matematiikasta tylsänä ja vaikeana aineena alkaa muodostua jo varhaisina kouluvuosina, kun taas usko omiin kykyihin alkaa horjua vasta ylemmillä luokilla. Näin ollen matematiikan tunneilla olisi tärkeää kiinnittää huomiota monipuolisiin työtapoihin, positiiviseen tunneilmapiiriin ja merkityksellisyyden kokemuksiin, jotta oppilaiden kuva matematiikasta ja itsestään matematiikan oppijana muodostuisi myönteiseksi. Luottamus omiin taitoihin sekä myönteinen matematiikkakuva edesauttavat matematiikan pariin hakeutumista sen jälkeen, kun matematiikan opiskelusta tulee vapaavalintaista – siis toisella asteella ja mahdollisissa jatko-opinnoissa (Hannula, 2018).

LUMATIKKA-hankkeessa Opetushallituksen asettamiin, aiemmassa luvussa kuvattuihin, tavoitteisiin on vastattu tarjoamalla opettajille edellytykset luoda päiväkoteihinsa ja kouluihinsa matematiikkainnostusta tukevaa oppimiskulttuuria. Keskiössä innostuksen luomisessa ovat esimerkiksi toiminnalliset työtavat, matematiikkapuheen lisääminen oppimistilanteisiin sekä matemaattisten ongelmien linkittäminen oppijan arkeen ja mielenkiinnonkohteisiin liittyviin ilmiöihin. Opettajia on kannustettu osallistumaan koulutukseen yhdessä samasta yksiköstä olevan kollegan kanssa, minkä on tutkimuksen (Sahlberg, 1996) mukaan todettu edesauttavan uusien toimintatapojen jalkauttamista oppimisyhteisöön.

Riippumatta siitä, osallistuuko opettaja yhdessä kollegan kanssa vai yksin, on hänet toivotettu osaksi oppivaa yhteisöä, jossa teoriapohjaista tietoa ja käytännön opetusideoita on jaettu opettajien ja koulutuksen toteuttajan kesken verkkoympäristön välityksellä. Verkkokoulutus onkin mahdollistanut myös koulunsa tai paikkakuntansa ainoiden opettajien saada vertaistukea yli paikkakuntarajojen.

2.2 Verkkokurssien kokonaisuus

Edellisessä luvussa kuvattujen ketterän kehityksen periaatteiden mukaisten vaiheiden kautta LUMATIKKA-ohjelma on muotoutunut MOOC-järjestelmässä 21 verkkokurssia kattavaksi täydennyskoulutuskokonaisuudeksi. Verkkokursseja on hankeaikana voinut suorittaa ohjatusti kahdesti lukuvuodessa. Kuten kurssimateriaalien suunnittelijoina, myös kurssien kouluttajina on toiminut alan asiantuntijoita suomalaisista tiedekorkeakouluista sekä niiden yhteydessä toimivista LUMA-keskuksista.

Luonteeltaan koulutuksen kurssit ovat olleet sellaisia, että niissä yhdistyvät teoria sekä sen soveltaminen käytäntöön omassa opetuskontekstissa. Ohjelmassa on ollut mahdollista suorittaa tällaisia yksittäisiä kursseja kokonaisuudessaan, vain teoriaosia niistä ja halutessaan jatkaa uudella kaudella käytännön osioon, tai laajempia monien kurssien kokonaisuuksia 15 opintopisteeseen saakka. Koulutusohjelma koostuu kolmesta koulutusosiosta: kaikkien osioiden kursseja on ollut tarjolla suomeksi ja ruotsiksi (ks. kuva 2).

- LUMATIKKA1 - kaikille osallistujille yhteinen matematiikan yleisdidaktiikan osio (laajuus kolme opintopistettä)
- LUMATIKKA2 - ikäkausikohtainen matematiikan didaktiikan osio (laajuus kuusi opintopistettä)
- LUMATIKKA3 - valinnainen osio, jossa osallistuja valitsee kurssitarjottimesta kolme itseään kiinnostavaa matematiikan erityisdidaktiikan kurssia (yhteenlaskettu laajuus kuusi opintopistettä).

Kuva 2. LUMATIKKA-ohjelman kurssitarjonta. Myös LUMATIKKA1 ja LUMATIKKA2-osion kursseista varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen sekä luokka-asteiden 1–9 kurssit ovat tarjottu ruotsiksi.

Ensimmäisen osion keskeisiä teemoja ovat matemaattisen ajattelun kehittyminen lapsuudesta aikuisuuteen, matemaattinen kielentäminen, oppimisvaikeudet ja tutkiva oppiminen, mihin tutustutaan käytännössä usein osallistujille uuden tuttavuuden 5E-mallin avulla. Kurssin erityispiirre on se, että se on yhteinen kaikkien opetusasteiden opettajille, mikä mahdollistaa vuoropuhelun eri asteiden opettajien välillä.

Toisessa osiossa osallistuja valitsee sen opetusastekohtaisen kurssin, jolla työskentelee. Osion kurssien pääpaino on oman opetusasteen keskeisimmissä matemaattisissa sisällöissä ja toimintatavoissa, joiden avulla oppijoiden osaamisen kehittymistä voidaan tukea ja innostusta lisätä. Kurssien yhteisiä teemoja ovat muun muassa matematiikan havainnollistaminen, kielentäminen, konkretia ja toiminnallisuus sekä yhteiskunnalliset yhteydet.

Koko ohjelman suorittava osallistuja kokoaa kolmannessa osiossa tarjolla olevista kahden opintopisteen kursseista itseään kiinnostavan kuuden opintopisteen laajuisen kokonaisuuden. Kurssit sisältävät moninaisesti matematiikan erityisdidaktiikkaa. Ne käsittelevät matematiikan yhtymäpintoja eheyttävästi esimerkiksi taiteen, luonnontieteiden ja kehollisuuden näkökulmista. Lisäksi kurssit syventävät muiden osioiden sisältöjä esimerkiksi ongelmanratkaisusta ja ohjelmoinnista.

2.3 Teemanumeron artikkelit

Teemanumeron pääkirjoitusta seuraavat artikkelit luotaavat tarkemman katsauksen koulutusohjelman teemoihin ja sisältöihin. Ensimmäiset artikkelit on suunnattu erityisesti tietyillä opetusasteilla työskenteleville opettajille, kun taas teemanumero päätetään kaikkia opetusasteita koskeviin aiheisiin.

Kaksi ensimmäistä artikkelia käsittelevät varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen matematiikan opetusta; ensimmäisessä keskiössä on koulutukseen osallistuneen opettajan havainnot sen merkityksellisyydestä osana opetuksen kehittämistä varhaiskasvatuksen arjessa, kun taas toinen artikkeli esittelee kurssin toiminnallisia näkökulmia varhaismatemaattisten taitojen opetukseen. Näiden jälkeiset kaksi artikkelia puolestaan esittelevät tutkimustuloksia kielentämisen ja toimintavälineiden käytöstä sekä niiden merkityksistä alakoulun matematiikan opetukselle ja oppimiselle.

Seuraavat kolme artikkelia käsittelevät matematiikan ja ohjelmoinnin opetusta peruskoulun luokilla 7–9 sekä toisella asteella. Viides artikkeli on suunnattu yläkoulussa ja lukiossa työskenteleville opettajille: se käsittelee tulevaisuuden taitoja (*21st century skills*) heijastettuna matematiikan opetussuunnitelmiin ja LUMATIKKA-ohjelman luokka-astekohtaisten kurssien painoalueisiin. Kuudes artikkeli on kirjoitettu erityisesti silmällä pitäen yläkoulun opetussuunnitelmaa. Siinä luodaan katsantoa siihen, mitä Lumatikan valinnaisosion erityisdidaktiikan kursseilla on tarjota ohjelmoinnillisen ajattelun kehittämiseen yläkoulun opetuksessa. Seitsemäs artikkeli syventyy ammatillisen koulutuksen opettajille suunnatulle kurssille, mihin osallistuneiden opettajien kokemia haasteita matematiikan opetuksessa omissa oppilaitoksissaan nostetaan esille sekä myös kurssin antia näiden haasteiden selvittämisessä.

Teemanumeron päättävät kaksi artikkelia ovat teemoiltaan koko koulutuspolkua läpileikkaavia. Ne käsittelevät jälkimmäisten LUMATIKKA-osioiden kahta merkittävää teemaa eli eheyttävää opetusta – tässä matematiikan ja musiikin näkökulmasta – sekä arviointia koulutuspolun eri päissä perusopetuksessa ja toisella asteella.

Vaikka teemanumeron ensimmäiset artikkelit on kirjoitettu erityisesti tietyn opetusasteen opettajat silmällä pitäen, suosittelemme niiden lukemista muidenkin asteiden opettajille. Artikkeleista voi saada vinkkejä myös omalle opetusasteelle vietäväksi sekä laajentaa omaa käsitystä matematiikan opetuksesta koulutuspolun eri vaiheissa – tavoittaen sitä LUMATIKKA-ideologiaa, mitä hankkeen koulutuskokonaisuus on pyrkinyt rakentamaan.

3 Päätössanat

LUMATIKKA on ollut Opetushallituksen vuosina 2018–2022 rahoittama hanke. Vaikka hankerahoitus päättyy vuoteen 2022, säilyvät opit ja kurssien materiaalit tallessa jääden elämään eri tavoin niin varhaiskasvatuksen, perus- ja toisen asteen opetuksessa kuin yliopistojen koulutustarjonnassa. Yliopistojen yhteydessä toimiva LUMA-keskus Suomi -verkosto haluaakin myös jatkossa vastata tarpeeseen kehittää matematiikan opetusta ja tukea sen oppimista hälventäen niitä varjostavia pilviä – tulevaisuutta hankkeen päättymisen jälkeen kirkastetaan tässä luvussa, pääkirjoituksen päätteeksi.

3.1 Verkkotäydennyskoulutuksen mahdollisuudet ja uhat

LUMATIKKA on ollut uraauurtavassa asemassa kehittämässä matematiikan opetusta osoittaen, että verkkokoulutusohjelma voi olla osallistujalle mielekäs ja työyhteisössäkin vaikuttava täydennyskoulutusmuoto (Uusi-Kilponen, 2021a). Ohjelma on vakiinnuttanut asemaansa suomalaisessa koulutuskentässä ja sen tunnettavuus on kasvanut läpi hankekauden, mikä on ollut havaittavissa kasvusuhdanteisina osallistujamäärinä ja esimerkiksi sosiaalisessa mediassa käytävissä keskusteluissa. Ohjelman verkkokurssit ovat olleet hyvin suosittuja, ja niille on löytänyt tiensä tuhansia opettajia, alan opiskelijoita tai muita aiheesta kiinnostuneita henkilöitä. Hankkeessa toteutetun tutkimuksen (Koponen ym., 2020) ja hanketyöryhmän saaman palautteen perusteella mahdollisuus kouluttautua verkossa ajasta ja paikasta riippumatta on otettu opettajien keskuudessa hyvin vastaan.

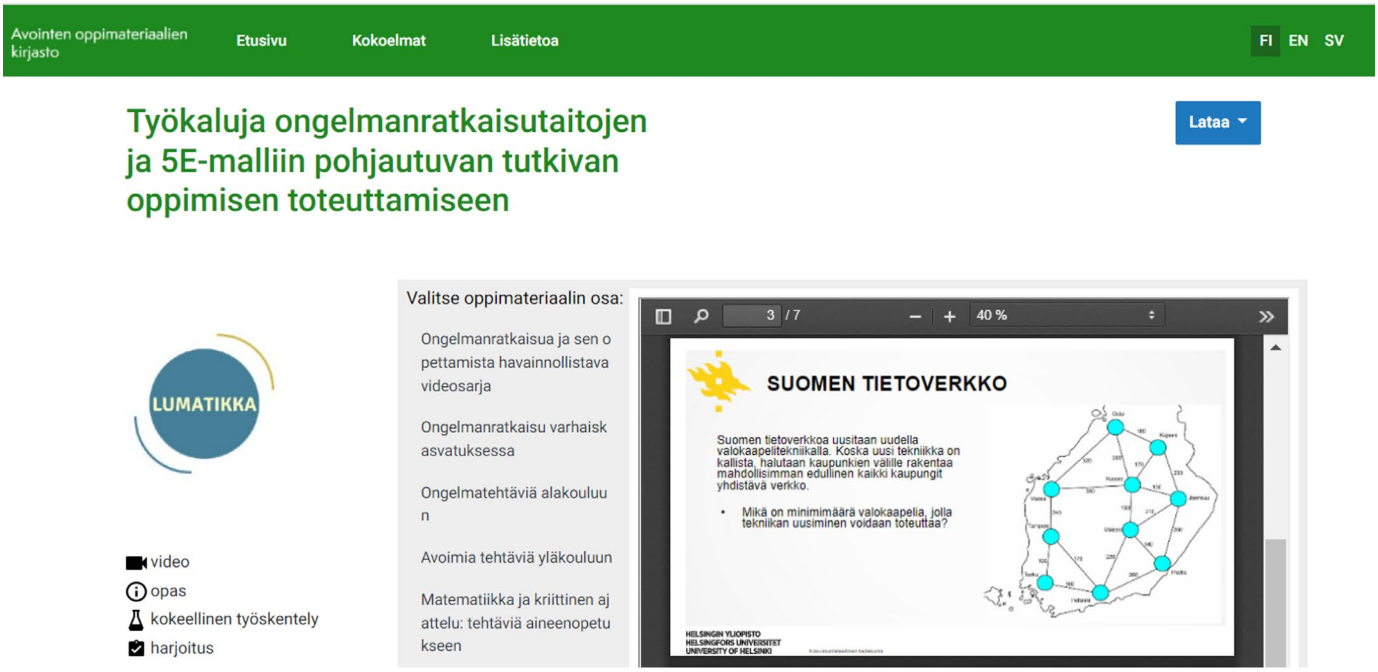
Toisaalta kaikki kurssille osallistuneet eivät ole varsinaisesti suorittaneet kurssia teoria- ja käytäntöosioineen. Arvioimme, että viime vuosina opettajiin kohdistuneet rankat ajat, kuten koronapandemia, opetussuunnitelmien uudistukset ja muuttuva ylioppilaskoe ovat osaltaan verottaneet osallistujien jaksamista läpäistä kokonaisia täydennyskoulutuskursseja. Näitä huomioita puoltavat myös osaltaan esimerkiksi viimeisimmät TALIS-tutkimukset (Taajamo & Puhakka, 2020). Keskeyttäneet osallistujat ovat usein kertoneen muun muassa ajan puutteen olleen syynä keskeytykseen, vaikka koulutuksen materiaalit onkin koettu hyödyllisiksi ja oman työn kannalta relevanteiksi (ks. Uusi-Kilponen, 2021a; Koponen ym., 2020). Saamamme palautteen mukaan kaikille opettajille kokonaan käydystä kurssista saatava todistus tai opintopisteiden rekisteröiminen eivät olekaan merkityksellisin syy osallistua koulutukseen, vaan kurssialueilla halutaan katsella, mitkä yksittäiset ideat ja materiaalit ovat oman työn kannalta tarpeellisimpia.

Laajoihin, monta sataa tuntia työtä vaativiin verkko-opintoihin ei ole siis helppoa saada työssäkäyviä opettajia sitoutettua, varsinkaan kun koulutuksen käymiseen ei välttämättä ole työaikaa ja sijaiskuluja käytettävissä. Tulevaisuudessa ratkaistavista keskeisistä tutkimuskysymyksistä lienee se, miten yhteiskunta- ja koulutuspoliittisilla tukitoimilla sekä automatiikalla ja tekoälyllä pystytään paitsi kannustamaan täydennyskoulutuskurssien suorittamista loppuun niin myös arvioimaan ja tukemaan oppimisen laadukkuutta, kun käytettävissä ei enää ole samanlaista valtionavustuksen suomaa henkilöresurssia kuin hankekauden aikana.

Toivottavaa olisi, että jatkossa työnantajat ymmärtäisivät verkkokoulutuksen opettajalle työpanoksena, johon tulisi resursoida työaikaa ja sijaiskuluja samaan tapaan kuin lähikoulutuksiinkin. Tästä viitteitä ovat antaneet LUMATIKKA-hankkeen pitämät oheistapahtumat, kuten opettajille suunnatut lähikoulutuspäivät kuntayhteistyön tuloksena, mihin osallistuminen on ollut paikoitellen hyvinkin suosittua kunnan tukiessa niihin osallistumista. Se saattaisi siten osaltaan lisätä opettajien intoa kouluttautua työn ohessa – varsinkin sellaisten opettajien, jotka eivät ole tavanneet osallistua täydennyskoulutuksiin. Asia koskettaa varteen otettavaa määrä opettajia, sillä tutkimusten mukaan Suomessa osallistuneisuus korkeakoulututkinnon jälkeisiin täydennyskoulutuksiin on ollut vaihtelevaa ja jopa vähäistä (ks. Metsämuuronen & Nousiainen, 2021; Vettenranta ym., 2020ab).

3.2 Matematiikan opettajien ja opetuksen tukena hankkeen päätyttyä

Vaikka Suomessa opettajien osallistuminen täydennyskoulutukseen on kansainvälisesti verraten vähäistä, opettajat kokevat kuitenkin tarvitsevansa täydennyskoulutusta eri sisällöistä ja hyötyvänsä siitä (Vettenranta ym., 2020ab). Jotta LUMATIKKA hankkeen päätyttyäkin voisi tukea opettajia työssään, tullaan hankkeessa tehty kattava ja laadukas materiaalikokoelma jättämään avoimeksi kaikkien saataville. Hankkeen videokirjasto avataan avoimeksi Youtube-kanavalle ja kirjallisia kurssimateriaaleja, kuten tehtävämonisteita, asiantuntijatekstejä, blogikirjoituksia ja kaksi elektronista kirjaa, julkaistaan Avointen oppimateriaalien kirjastossa (AOE) hankkeen päättymiseen mennessä (ks. kuva 3).



Kuva 3. Esimerkki AOE-palveluun viedystä LUMATIKKA 1-kurssin materiaalikokoelmasta Työkaluja ongelmanratkaisutaitojen ja 5E-malliin pohjautuvan tutkivan oppimisen toteuttamiseen.

Hankkeen päättymiseen mennessä (31.12.2022) kaikista LUMATIKKA-verkkokursseista muokataan lisäksi itseopiskeluversiot, jotka tulevat kaikkien saataville uuteen korkeakoulujen yhteiseen Digicampus-oppimisympäristöön. Tällöin kurssien aiempi sijoituspaikka, Helsingin yliopiston MOOC-alusta, lakkautetaan.

Hankkeen saavutuksena voi pitää myös yhteistyötä yliopistojen opettajankoulutuksen kanssa, minkä myötä jo opettajaksi opiskelevatkin ovat kiinnostuneet LUMATIKKA-kursseista saadessaan rekisteröityä niistä opintopisteitä osaksi valinnaisia opintojaan. Siitä perintönä osa LUMATIKKA-kursseista tullaan näillä näkymin näkemään ainakin Helsingin yliopiston ja Åbo Akademin kasvatustieteellisten tiedekuntien opetussuunnitelmissa jatkossakin. Myös muut hankeosapuolet voivat hyödyntää hankkeen aikana kehitettyjä sisältöjä sekä verkkokursseja organisaatioissaan osana varhaiskasvatuksen opettajien, luokanopettajien ja aineenopettajien peruskoulutusta tai muita tutkinto-ohjelmia, joihin materiaalit soveltuvat.

Toivomme, että LUMATIKKA-hankkeen yhteydessä tehdyillä tutkimuksilla ja verkkopedagogiikasta saaduilla kokemuksilla, joita kirjoituksessamme olemme esittäneet, olisi hyötyä tulevaisuuden verkkokurssien ja opetuksen kehittämisessä. Hankkeita tulee ja päättyy, mutta tarve jatkaa jatkuvan oppimisen polulla koskettaa meitä kaikkia. Uuden rakentaminen vanhan opin päälle, aiempien kartutettujen tietojen valossa, on tutkivan oppimisen mukainen taloudellinen lähtökohta kehittämistyölle, minkä vuoksi LUMATIKKA-ohjelman aikana kertyneen verkkopedagogisen ja aineettoman pääoman säilyminen tallessa on arvokasta.

Yhden hankkeen päättyminen ei myöskään tarkoita sitä, etteikö LUMA-verkosto kokisi tärkeäksi jatkossakin kehittää matematiikan opetusta. Opetus- ja kulttuuriministeriö (2021) on nostanut LUMA-osaamisen fokukseen laatimalla Suomen *LUMA-strategian* vuodelle 2030. Strategia nostaa esille matematiikan alan tärkeyttä suomalaisessa kasvatus- ja koulutuskentässä. LUMA-keskus Suomi -verkosto on ollut mukana strategian laatimisessa, ja näkee LUMATIKKA-hankkeen päätyttyäkin opettajien työn tukemisen matematiikan opettamisen saralla erittäin tarpeellisena.

Kolmetoista LUMA-keskusta ympäri Suomen tarjoavat matematiikan opetuksen tueksi tutkimukseen ja eri opetusasteiden opetussuunnitelmien perusteisiin pohjautuen muun muassa asiantuntevaa apua, koulutusta, oppimateriaaleja, tiedeluokkavierailuja koululais- ja päiväkotiryhmille sekä leiri- ja kerhotoimintaa osana valtakunnallista tehtäväänsä (Aksela ym., 2021). Näiden ohella LUMA-toimintaa kytketään opettajankoulutusvaiheeseen, jotta opettajilla olisi jo valmistuessaan valmiudet olla osa LUMA-verkostoa. Yhdessä koko verkoston voimin toivomme ja haluamme uskoa, että suomalaiset lapset, nuoret sekä heidän opettajansa löytävät ”matikkalasinsa”, jolloin innostus sekä osaaminen matemaattisia aineita kohtaan voimistuu entisestään!

Kiitokset

Tahdomme kiittää Opetushallitusta LUMATIKKA-hankkeelle myönnetystä valtionavustuksesta, jonka turvin ohjelman toteuttaminen on ollut mahdollista. Kiitämme myös hankkeen partnereita, sidosryhmiä ja koulutukseen osallistuneita kouluttajia, opettajia ja opiskelijoita panoksestanne ohjelman suunnittelussa ja toimeenpanossa.

Lähteet

Aksela, M. & Lehto, S. (toim.). (2019). *LUMA – yhdessä olemme enemmän! Intoa matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian opetukseen ja opiskeluun. Raportti kansallisesta LUMA SUOMI -kehittämisohjelmasta vuosilta 2014–2019.* Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2019:35.

Aksela, M., Lundell, J. & Ikävalko, T. (2021). Kansallinen LUMA-tiedekasvatus: uusia ratkaisuja ja toimintamalleja. Teoksessa M. Aksela, J. Lundell & T. Ikävalko (toim.) *LUMA SUOMI – yhdessä olemme enemmän!* (s. 45–120). Helsinki: Unigrafia Oy. https://www.luma.fi/download/luma-suomi-yhdessa-olemme-enemman/

Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-bulletin*, *18*(4), 63–74.

Hannula, M. (2018, syyskuu 26). Uutta tutkimustietoa matematiikan oppimisesta. YouTube: LUMATIKKA. https://www.youtube.com/watch?v=3faw3pUzbOo

Hietakymi, E. & Aksela, M. (2020). LUMATIKKA-täydennyskoulutus: Kohti oppijalähtöistä ja innostavaa matematiikan opetusta. Teoksessa M. Aksela, J. Lundell & T. Ikävalko (toim.) *LUMA SUOMI – yhdessä olemme enemmän!* (s. 105–106). Helsinki: Unigrafia Oy.

Hill, P. (2013, maaliskuu 10). Emerging Student Patterns in MOOCs: A (Revised) Graphical View. https://eliterate.us/emerging-student-patterns-in-moocs-a-revised-graphical-view/

Koponen M., Löfström E. & Portaankorva-Koivisto P. (2020). *”Kiire on”. Matematiikan opetuksen täydennyskoulutuksen vaikuttavuus opettajan näkökulmasta* [Käsikirjoitus lähetetty julkaistavaksi].

Koponen, M., Sydänmaanlakka, A. & Löfström, E. (2021). Verkko-oppimisympäristöjen kehittäminen tekoälyn avulla: Tulevaisuusvisio matematiikan opetuksen täydennyskoulutuksesta. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1660

Kupari, P., & Välijärvi, J. (toim.). (2005). *Osaaminen kestävällä pohjalla. PISA 2003 Suomessa.* Koulutuksen tutkimuslaitos.

Löfström E., Koponen, M., Salonen, V., & Aksela M. (2021). *Teachers’ experiences of e-learning in mathematics teaching in-service training: Two dimensions of meaningful learning* [Käsikirjoitus lähetetty julkaistavaksi].

Metsämuuronen, J., & Nousiainen, S. (2021). *MATEMATIIKKAA COVID-19-PANDEMIAN VARJOSSA – Matematiikan osaaminen 9. Luokan lopussa keväällä 2021.* Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 27: 2021.

Nilsen, G. S. (2019). *Digital Learning Arena.* Report of BI Norwegian Business School in collaboration with EdTech Foundry 2015-2019.

Opetushallitus. (2019). Opetustoimen ja varhaiskasvatuksen henkilöstökoulutus 2019, lisähaku matematiikkaan, johtamiseen sekä luku- ja kirjoitustaitoon. Haettu 29.4.2022 osoitteesta https://www.oph.fi/fi/funding/opetustoimen-ja-varhaiskasvatuksen-henkilostokoulutus-2019-lisahaku-matematiikkaan

Opetushallitus. (2017). Opetustoimen ja varhaiskasvatuksen henkilöstökoulutus 2017, lisähaku matematiikkaan ja johtamiseen. [Hakutiedote 32/2017, 10.10.2017.]

Opetusministeriö. (2007). *Opettajankoulutus 2020. Opetusministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2007:44.* Helsinki: Yliopistopaino.

Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2021). Suomen LUMA-strategia 2030. https://okm.fi/documents/1410845/102318523/Suomen+LUMA-strategia+2030.pdf

Opetus- ja kulttuurimisteriö. (2019). Uusi peruskoulu -kärkihanke 2016–2018 —Loppuraportti. https://okm.fi/documents/1410845/4583171/Uusi+peruskoulu+-k%C3%A4rkihanke+2016-2018+loppuraportti/111c39fb-b2e9-b270-6778-fc0faa009661/Uusi+peruskoulu+-k%C3%A4rkihanke+2016-2018+loppuraportti.pdf?t=1557487075000

Sahlberg, P. (1996). Kuka auttaisi opettajaa: postmoderni näkökulma opetuksen muutokseen yhden kehittämisprojektin valossa [väitöskirja: Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/75371

Taajamo, M. & Puhakka, E. (2020). Opetuksen ja oppimisen kansainvälinen tutkimus TALIS 2018. Perusopetuksen vuosiluokkien 7–9 ensituloksia, osa 2. Opetushallitus. Raportit ja selvitykset 2020:18. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/opetuksen_ja_oppimi-sen_kansainvalinen_tutkimus_talis_2018_osa_2.pdf

Tuohilampi, L. (2016). *Deepening mathematics related affect research into social and cultural: Decline, measurement and significance of students' multi-level affect in Finland and Chile* [väitöskirja: Helsingin yliopisto]. https://helda.helsinki.fi/handle/10138/160159

Uusi-Kilponen, A. (2021a). *Oppia ikä kaikki. Pitkittäistutkimus LUMATIKKA-täydennyskoulutuksen ja työkokemuksen pituuden yhteydestä luokanopettajien mielekkääseen oppimiseen sekä opetustyön kehittämiseen*. [pro gradu -tutkielma: Helsingin yliopisto]. https://helda.helsinki.fi/handle/10138/328612

Uusi-Kilponen, A. (2021b). 1/42 Uutta tutkimustietoa – Asiantuntijan puheenvuoro. Kansainvälisen matematiikan oppimisen TIMMS 2019 -tutkimus suunnannäyttäjänä. https://mooc.helsinki.fi/mod/hvp/view.php?id=27455

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Kotila, J., Lehtola, P., Nissinen, K., Puhakka, E., Pulkkinen, J. & Ström, A. (toim.). (2020a). *Perustaidoista vauhtia koulutielle. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen*. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Kotila, J., Lehtola, P., Nissinen, K., Puhakka, E., Pulkkinen, J. & Ström, A. (toim.). (2020b). *Tulevaisuuden avaintaidot puntarissa. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen*. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Välijärvi, J., & Linnakylä, P. (2002). *Tulevaisuuden osaajat - PISA 2000 Suomessa*. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Toiminnallisia näkökulmia varhaismatemaattisten taitojen opetukseen

Teemu Hokkanen

Kasvatustieteiden tiedekunta, Oulun yliopisto

Tiivistelmä: Korkealaatuinen varhaismatemaattisten taitojen opettaminen edellyttää opetustoimen henkilöiltä tietoa matematiikan taitojen osa-alueista sekä monipuolisista pedagogisista menetelmistä niiden soveltamiseksi. Erityisesti lukukäsitteen sisäistämisellä on merkittävä rooli varhaisessa matemaattisen ajattelun kehityksessä, ja se vaikuttaa siten matematiikan osa-alueiden myöhempään hallintaan. Kasvatus- ja opetustyössä voidaan soveltaa Jerome Brunerin oppimisteoriaa, joka ohjaa tiedon havainnointiin ja käsittelyyn monia aistikanavia käyttäen. Tässä artikkelissa kuvataan näitä varhaismatemaattisia taitoja sekä Brunerin oppimisteoriaa, sekä sidotaan niitä käytännön opetusesimerkkeihin.

Asiasanat: varhaismatemaattiset taidot, varhaiskasvatus, esiopetus, toiminnallinen matematiikka

Yhteystiedot: teemu.hokkanen@oulu.fi

1 Johdanto

Tässä artikkelissa tarkastelen, mitä varhaismatemaattisilla taidoilla tarkoitetaan eri lähteissä ja mitä ajattelun taitoja käsitteeseen liittyy. Sidon tämän teoreettisen kokonaisuuden varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen viitekehykseen, jossa tuon esille käytännönläheisiä opetusesimerkkejä mainittujen matemaattisten ajattelutaitojen tukemiseksi.

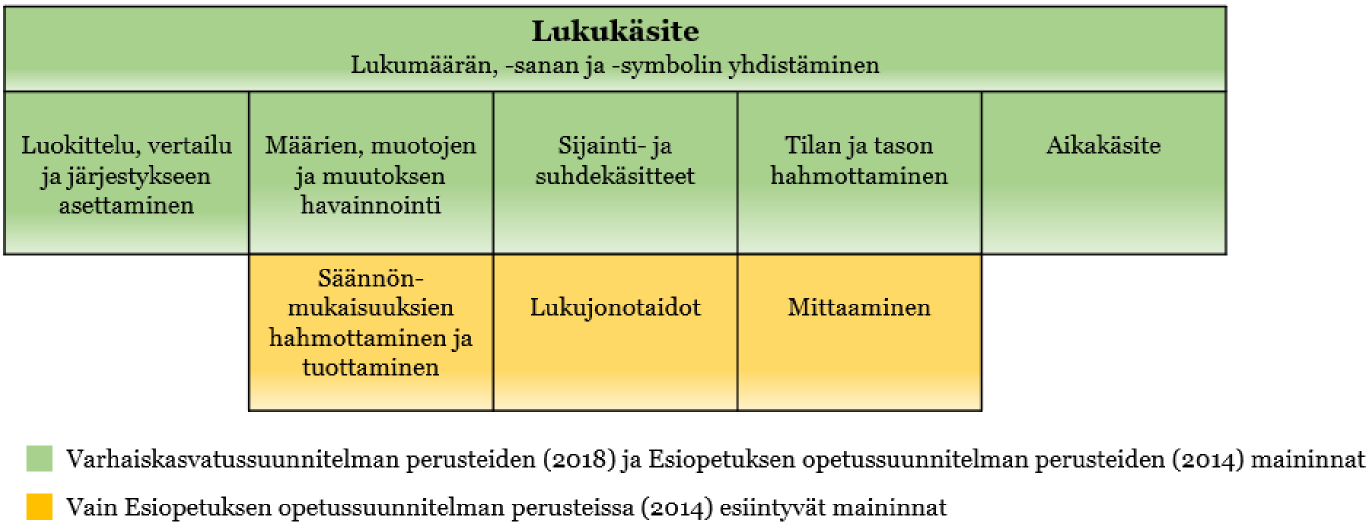
Ensimmäisessä luvussa varhaismatemaattisten taitojen käsite avataan eri lähtein. Koska lukukäsitteellä on erityinen merkitys matemaattisten taitojen myöhempään kehitykseen nähden, tarkastelen toisessa luvussa sen määritelmää, sekä joitain arviointikeinoja, joilla voidaan havainnoida lapsen lukukäsitteen sisäistämisen tasoa.

Kolmannessa luvussa esitän lyhyesti Jerome Brunerin (1976) kolmitasoisen oppimisteoreettisen mallin, joka toimii opettamisen ja oppimisen tarkasteluvälineenä: mallin avulla pyritään havainnollistamaan, kuinka tieto näyttäytyy konkreettisilla ja symbolisilla tasoilla, ja kuinka lapsi käyttää aistejaan tämän tiedon käsittelemiseksi. Lopuksi neljännessä luvussa siirryn antamaan käytännön esimerkkejä niiden varhaismatemaattisten taitojen tukemisesta, jotka erittelen ensimmäisessä luvussa.

2 Varhaismatemaattiset taidot – mitä ja miten tulee opettaa?

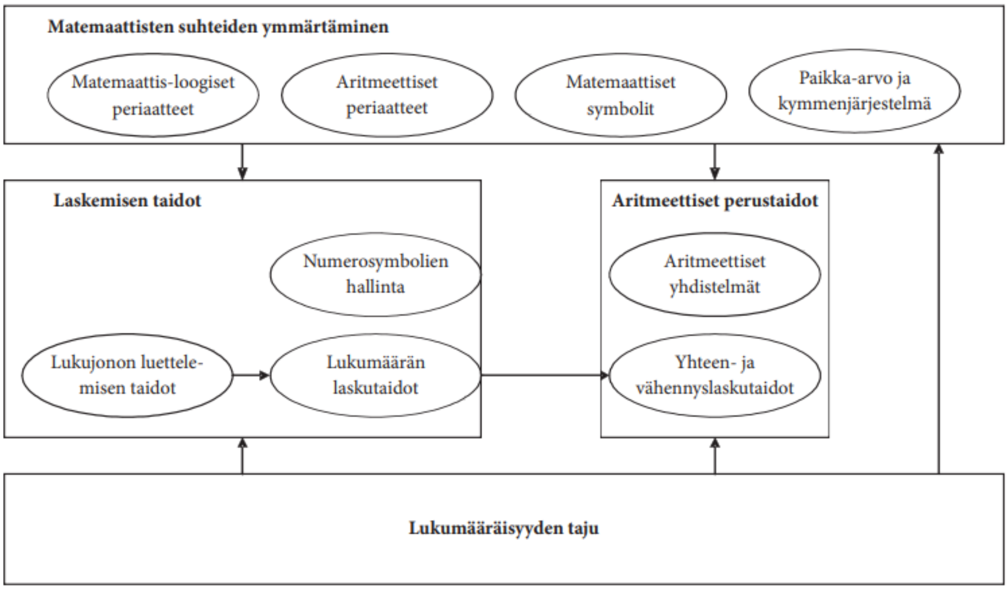
Tehokas, huolellinen ja tutkimustietoon perustuva *matemaattisten ajattelutaitojen* harjoittelu edellyttää opetustoimen henkilöltä kykyä hahmottaa selkeästi kaksi kysymystä: *mitä matemaattisia ajattelutaitoja harjoitellaan* sekä *miten niitä voidaan harjoitella*. Vastatakseni näihin kysymyksiin on tärkeää määritellä ensin matemaattisten ajattelutaitojen käsite. Tarkastelen ensiksi, kuinka varhaismatemaattiset taidot määritellään eri kasvatus- ja opetustyötä ohjaavissa asiakirjoissa sekä muussa lähdekirjallisuudessa.

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2018, s. 46) esittää matemaattisen ajattelun pitävän sisällään lukukäsitteen kehittymisen, muotojen, määrien ja muutosten havainnoinnin, kyvyn luokitella, vertailla ja asettaa asioita tai esineitä järjestykseen, tilan ja tason hahmottamisen, sijainti- ja suhdekäsitteet sekä aikakäsitteen. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2014, s. 36) esittämä määritelmä tuo edellisten matemaattisten ajattelun taitojen lisäksi esiin myös mittaamisen, säännönmukaisuuksien hahmottamisen ja tuottamisen sekä lukujonotaidot. (Ks. kuvio 1.)



Kuvio 1. Varhaiskasvatusta ja esiopetusta ohjaavien asiakirjojen mainitsemat matemaattisen ajattelun osa-alueet.

Näiden ajattelutaitojen voidaan nähdä kuuluvan Aunion (2008) esittämään malliin, joka ryhmittelee keskeisimmät matemaattiset taidot neljään pääluokkaan: *matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen, laskemisen taitoihin, artimeettisiin perustaitoihin* sekä *lukumääräisyyden tajuun* (ks. kuvio 2). Aunion mukaan luokittelu, vertailu ja järjestykseen asettaminen kuuluvat matemaattisten suhteiden ymmärtämisen luokkaan. Lukukäsitteen hallinta ja lukujonotaidot voidaan nähdä liittyvän laskemisen taitoihin (Aunio, 2008, s. 66–68).



Kuvio 2. Matemaattisten taitojen neljä pääluokkaa (Aunio, 2008)

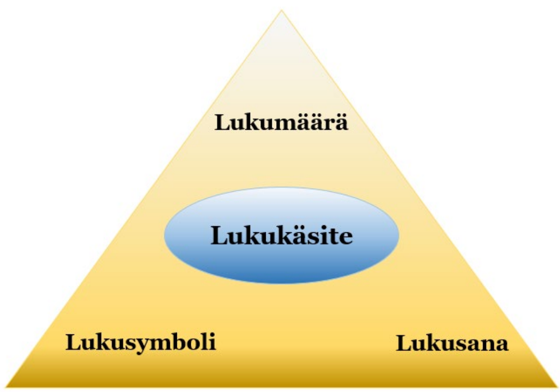
Nämä ajattelun taidot muodostavat varhaismatemaattisten ajattelutaitojen kokonaisuuden, jonka tulee olla varhaiskasvatuksessa sekä esiopetuksessa matemaattisten taitojen harjoittelun ydinsisältö. Tämä kokonaisuus vastaa kysymykseen, mitä varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa harjoitellaan matemaattisten ajattelutaitojen osalta. Sekä varhaiskasvatuksessa että esiopetuksessa työskentelevien on siis olennaisen tärkeä varmistua siitä, että näitä taitoja harjoitellaan vuoden aikana järjestelmällisesti, esimerkiksi ennalta laaditun vuosiaikataulun mukaisesti, jottei olennaisia osa-alueita jää käsittelemättä tai liian vähälle huomiolle.

Varhaiskasvatusta ja esiopetusta ohjaavat asiakirjat vastaavat osittain myös kysymykseen siitä, millä tavoin matemaattisten ajattelun taitoja voidaan harjoitella. Tavoista varhaiskasvatussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2018, s. 46) mainitsevat arjen tilanteiden hyödyntämisen, leikin, kehollisuuden, kuvien sekä erilaisten välineiden hyödyntämisen. Näiden lisäksi esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2014, s. 36) tuovat esille pelien, tarinoiden sekä tieto- ja viestintätekniikan käyttömahdollisuudet. Maininnat ovat yleisellä tasolla kuvattuja, eivätkä varsinaisesti anna vielä käytännöllisiä ehdotuksia eri toimintatapojen toteuttamiseksi. Myöhemmin tässä artikkelissa tarkastelemme näihin liittyviä konkreettisempia lähestymistapoja, jotka ovat sellaisenaan valmiita käytettäviksi omaan kasvatus- ja opetustyöhön.

3 Lukukäsite ja sen sisäistämisen merkitys matemaattisen ajattelun kehittymisessä

Lukukäsitteen sisäistämisellä on erityisen olennainen merkitys kokonaisvaltaisen matemaattisen ajattelukyvyn kehittymisessä, joka edesauttaa peruskoulutuksessa vaadittavien laskutaitojen hyvän hallinnan oppimista (Fuson, 1988). Lukukäsitteeseen liittyvät ominaisuudet näkyvät kaikissa matematiikan osa-alueissa, ja siitä syystä sen syvällinen sisäistäminen on lapsen varhaisen kasvun vaiheessa ensiarvoisen tärkeää: tutkimuksissa on havaittu lukukäsitteen sisäistämisen ennustavan myöhempiä matemaattisten taitojen kehittymistä (Hannula-Sormunen ym., 2015; Aunio ym., 2015).

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2018, s. 46) ohjaa kehittämään lukukäsitettä muun muassa harjoittelemalla lukumäärien yhdistämistä lukusanaan. Vastaavasti Kajetski ja Salminen (2020) katsovat lukukäsitteen tarkoittavan kykyä yhdistää lukumäärä, lukusana sekä lukusymboli toisiinsa (kuvio 3). Lukukäsitteen voidaan katsoa pitävän sisällään kyvyn lukumäärien nimeämiseen, luettelemiseen ja vertailuun näillä kolmella esitystasolla, yksi yhteen -vastaavuuden sekä lukumäärän säilyvyyden ymmärtämisen (Kajetski & Salminen, 2020, s. 89; Näveri, 2018, s. 70; Vuorio, 2010, s. 144).



Kuvio 3. Lukukäsitteen muodostavat osatekijät

Kinnusen (2003, s. 7) mukaan monien oppilaiden tyypillisten matemaattisten oppimisen vaikeuksien, väärinkäsitysten ja virheiden juurisyynä ovat puutteet lukujen ymmärtämisessä ja lukujen käsittelyssä – toisin sanoen taidoissa, jotka ovat olennainen osa lukukäsitteen ymmärtämistä. Kuten todettua, lukukäsitteen sisäistäminen, lukujen ymmärtäminen ja niiden käsittelyn taitotaso vaikuttavat merkittävästi lapsen tulevaisuuden mahdollisuuksiin oppia matematiikkaan liittyviä laskutaitoja. Vakaa pohja peruskoulua varten rakennetaan järjestelmällisesti suunnitellussa ja tehokkaasti toteutetussa varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa.

Lapsen lukujen ymmärtämisen ja lukujen käsittelyn taitotason arvioimiseksi voidaan laatia erilaisia tehtäviä, jotka pitävät sisällään tiettyjä arviointikriteerejä. Näiden tehtävien ratkaiseminen antaa opetushenkilölle tietoa lapsen ajattelutavoista ja ongelmanratkaisustrategioista. Otetaan tarkastelun kohteeksi seuraavat esimerkkitehtävät, ja syvennytään hieman tarkemmin niiden sisältöön ja soveltamisen keinoihin. Tehtävät perustuvat Kinnusen (2003) teoksessa esitettyihin tehtäviin, mutta tässä niitä on pelkistetty ja muokattu varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen sopivammiksi liittäen mukaan myös Kajetskin ja Salmisen (2020), Näverin (2018) sekä Vuorion (2010) aiheeseen liittyviä huomioita.

1. Kysy lapselta mihin asti hän osaa laskea.
2. Pyydä lasta laskemaan luvusta 1 eteenpäin.
3. Pyydä lasta laskemaan esineiden lukumäärä.
4. Pyydä lasta laskemaan luvusta __ eteen-/taaksepäin.
5. Pyydä lasta laskemaan eteen-/taaksepäin luvusta __ lukuun __.

Opetustyössä toimivan henkilön on hyvä tiedostaa valitun sanamuodon merkityksellisyys ohjeen antamisessa: lasta pyydetään *laskemaan* tiettyyn lukuun asti, mutta tosiasiassa lapsi ei varsinaisesti laske mitään eli ei suorita minkäänlaista laskutoimitusta. Lapsi luettelee lukujonon jäseniä mainituissa esimerkkitehtävissä. Lukujen *laskeminen* on kuitenkin lapselle ymmärrettävämpi sanamuoto, kuin esimerkiksi pyyntö *luetella lukuja eteenpäin*. Käyn seuraavaksi mainitut viisi kohtaa läpi avaten niiden sisältöä tarkemmin.

1. Kysy lapselta mihin asti hän osaa laskea.

Lapselta voidaan kysyä, mihin asti hän osaa laskea. Lapsen vastaus tai reaktio kysymykseen kertoo hänen taitotasostaan. Vielä heikolla tasolla oleva lapsi ei välttämättä vastaa millään tietyllä luvulla kysymykseen, vaan luetellen hallitsemaansa lukujonoa, mahdollisesti sormia apuna käyttäen. Hieman kehittyneemmällä tasolla oleva lapsi voi antaa varovaisen arvion jostain tuntemastaan luvusta, esimerkiksi sanomalla kuuteen tai yhdeksään. Hyvin kehittyneet taidot näkyvät siten, että lapsen arvio luvusta, jonne asti hän osaa laskea osuu hyvin lähelle tai hän tietää tarkalleen, mihin asti hän osaa laskea. Parhaimmillaan lapsi kertoo laskemisen voivan jatkua loputtomasti, ja hän voi kyetäkin luettelemaan lorumaisesti lukujonoa pitkälle. Tärkeää on kuitenkin tällöinkin panna merkille, että kyseessä voi olla lähinnä ulkomuistiin perustuva kielellinen toiminta, joka ei välttämättä anna tietoa lapsen lukumäärien ja -sanojen välisiin suhteisiin liittyen (Kajetski & Salminen, 2020, s. 99; Vuorio, 2010, s. 144–145).

2. Pyydä lasta laskemaan luvusta 1 eteenpäin.

Tämä kysymys on hyvä esittää ensimmäisen esimerkkikysymyksen jälkeen. Näin voidaan verrata tosiasiallista suoritusta lapsen omaan arvioon. Kohtalaisen suuri tai hyvin selkeä poikkeama lapsen aiemmin antaman arvion ja viimeisen luettelemansa lukuarvon välillä kertoo siitä, että lapsi tarvitsee harjoitusta lukusanojen oppimisessa sekä kehittyneempää ymmärrystä lukusanojen paikkojen järjestyksestä suhteessa toisiinsa lukujonossa (Näveri, 2018, s. 76–78).

3. Pyydä lasta laskemaan esineiden lukumäärä.

Esineiden laskemisessa lukukäsitteen eri esitystasot tulevat hyvin nähtäville. On hyvä käyttää esineitä, jotka lapsi kokee itseään kiinnostaviksi: niitä voivat olla vaikkapa lelut, kolikot, multilink-palikat, pullonkorkit ja muut. Tehtävässä voidaan kiinnittää helposti huomiota lapsen kykyyn liittää oikea lukusana sitä vastaavaan lukumäärään, eli yksi yhteen -vastaavuuteen.

4. Pyydä lasta laskemaan luvusta __ eteen- tai taaksepäin.

Tällä tarkastellaan lapsen lukujonojen kokonaisvaltaista hallintaa. Lukujonotaidoissa riittävän kehittynyt lapsi kykenee aloittamaan laskemisen määrätystä luvusta ilman, että hänen tarvitsee aloittaa laskemista luvusta 1 tai muuta määrättyä lukua aikaisemmin. Vähemmän kehittynyt ymmärrys voi näyttäytyä siten, että lapsi jättää lukuja välistä tai saattaa pysähtyä ja aloittaa laskemisen alusta. Lasta on hyvä siis pyytää laskemaan esimerkiksi luvusta 6 eteen- tai taaksepäin, kunnes hänet keskeytetään.

5. Pyydä lasta laskemaan eteen- tai taaksepäin luvusta __ lukuun __.

Tämä tehtävä sopii jo lukujonotaidot melko hyvin hallitseville tai jo selkeästi edistyneille lapsille. Tehtävä on haastavampi muoto edellisestä tehtävästä 4, sillä lapselle annetaan lueteltavan lukujonon aloitus- ja päätepiste, eikä lasta keskeytetä: “Laske ääneen neljästä yhteentoista.” tai “Laske ääneen kolmestatoista seitsemään.”. Tehtävän haastavuus perustuu siihen, että mikäli lapsi ei tunne hyvin lukujonon järjestykseen liittyviä sääntöjä, hän joutuu käyttämään apuna lukusanalistaa tai visuaalista lukujonoa. Tälle tehtävällä tyypillinen virhe on, että laskemista ei päätetä annettuun lukuun, vaan laskemista jatketaan. Tämä kertoo siitä, ettei lapsi välttämättä vielä osaa selkeästi mieltää lukujonoa nousevaksi tai laskevaksi osajonoksi eli sellaiseksi, josta voidaan erottaa osia.

4 Moniaistinen oppiminen ja Jerome Brunerin oppimisteoria

Kaikki ne virikkeet ja tehtävät, joille lapsi altistuu varhaisessa vaiheessa vaikuttavat merkittävästi hänen oppimistapojensa ja -tyyliensä myöhempään kehitykseen (Vuorio, 2010, s. 135). Näköaisti on aisteista tärkein, sillä sen välityksellä lapsi saa monipuolista ja yksityiskohtaista tietoa ympäristöstään. Näköaistin avulla omaksumme aluksi yksinkertaiset, myöhemmin yhä monimutkaistuvat, hahmot. Alussa kyseessä voi olla vaikkapa yksinkertainen pallo. Lapsi voi piirtää outoja kiemuroita ja kutsua niitä palloiksi, sillä hänen mielessään ne edustavat palloa. Tämän kehityskulun jatkuessa lapsi havaitsee myöhemmin, että tiettyjä tarkasti sovittuja koukeroita kutsutaankin nimillä: *yksi, kaksi, kolme* ja niin edelleen. Nämä nimet edustavat tiettyjä määriä.

Myös etenkin kuuloaisti on näön ohella lähes yhtä merkityksellinen tiedon vastaanottokanava. Sen kautta lapsi oppii puheilmaisun mekanismit. Varhaisessa vaiheessa lapsi kuulee aikuisten suusta sanoja, kuten *kolmio* tai *viisi*, mutta nämä eivät vielä edusta tarkkaa käsitystä geometrisesta muodosta eikä numeroon 5 liittyvästä lukumäärästä tai -symbolista. Toisaalta kuitenkin näön ja kuulon ohella myös tuntoaistein voidaan auttaa hahmottamaan määriä.

Varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa on siis syytä lähestyä harjoiteltavia aiheita moniaistisesti, sillä näin varmistetaan tehokas tiedon vastaanotto ja myöhemmät oppimistottumukset. Tästä esimerkkinä Jerome Bruner (1967) on esittänyt oppimisteorian, jossa mainittu moniaistinen oppiminen havainnollistuu kolmen tason kautta:

1. Toiminnallinen taso
2. Ikoninen taso
3. Symbolinen taso

Toiminnallisella tasolla lapsi on välittömillä aistihavainnoillaan tekemisissä harjoiteltavan asian kanssa. Tälle tasolle on tyypillistä konkreettisten materiaalien ja välineiden käyttö. Esimerkiksi lukumäärää laskiessa on mahdollista asettaa vaikkapa leluja, kyniä tai vaatteita ryhmiin jonkin ominaisuuden, kuten värin tai muodon mukaan.

Mielikuvia, jotka saavutetaan toiminnallisella tasolla, tulevat hyödynnetyiksi *ikonisella tasolla*. Nimensä mukaisesti visuaalisilla oppimiskeinoilla on tässä olennainen rooli. Lukumäärää harjoitellessa voidaan esimerkiksi tarkastella erilaisista esineitä koostuvia ryhmiä, joissa esineiden kappalemäärä pyritään laskemaan.

Symbolisella tasolla ryhdytään puolestaan lukusymbolien käyttämisen harjoitteluun. Lukusymbolit ovat sopimuksenvaraisia, eikä esimerkiksi lukusymbolilla 5 ole mitään luonnollista yhteyttä sitä vastaavaan kappalemäärään muuten kuin siinä mielessä, että puhe- ja kirjoitusjärjestelmässämme on niin sovittu. Myös sanat edustavat symbolista tasoa; esimerkiksi lukusanat yksi, kaksi, kolme ja niin edelleen ovat verbaalisia ja auditiivisia sopimuksia tietyille kappalemäärille ja lukusymboleille.

5 Käytännön esimerkkejä varhaismatemaattisten taitojen opetukseen

Seuraavaksi tarkoituksenani on nostaa esiin konkreettisia, käytännön toteutuksiin soveltuvia ideoita, joilla varhaismatemaattisten taitojen harjoittelua voidaan toteuttaa. Tarkastelen esimerkkejä lukukäsitteeseen, geometriaan, sijainti- ja suhdekäsitteisiin, ohjelmointiin, mittaamiseen ja aikakäsitteeseen liittyen. Esimerkeissä voidaan nähdä monien eri aistien käyttö Brunerin oppimisteoriaan nojaten sekä opetusta ohjaavien asiakirjojen (Opetushallitus 2018; 2014) ohjeistus luokittelun, vertailun ja järjestykseen asettamisen harjoittelusta.

5.1 Lukukäsite

Lukukäsitettä voidaan vahvistaa lähiympäristössä, esimerkiksi lähimetsässä luonnonmateriaaleja hyödyntämällä. Toimitaan pistetyöskentelynä neljällä pisteellä (jos lapsia ei ole tarpeeksi, niin jonkin pisteen voi jättää pois):

1. Lukumäärä taputuksena ja liikkeenä
2. Lukumäärien vertailu
3. Kuinka monta kiveä / käpyä / esinettä pussissa

4. Lukumäärä hulavanteeseen

Ensimmäisellä pisteellä keksitään yhdessä jokin liike, kuten x-hyppy, kyykistyminen tai kuperkeikka. Aikuinen pyytää lapsia kuuntelemaan taputuksen lukumäärän ja toistamaan sovitun liikkeen yhtä monta kertaa. Esimerkiksi, jos sovitaan liikkeeksi x-hyppy, niin aikuinen taputtaa viidesti taputusta ja lapset toistavat x-hypyn viisi kertaa. Ylöspäin eriyttävänä tehtävänä voi myös antaa lapsen olla aikuisen tilalla taputtajana.

Toisella pisteellä aikuinen ryhmittelee eri materiaaleja eri muotoihin lasten nähtäville, esimerkiksi käpyjä hajanaisesti yhteen ryhmään, oksanpätkiä jonoon ja kiviä neliön muotoon. Tärkeää on, että jokaisessa ryhmässä materiaaleja on eri kappalemäärä. Pyydetään lapsia katsomaan hetki esineryhmiä ja kysytään, “Missä ryhmässä on eniten asioita?” ja “Missä vähiten?” Ajatuksena on, että jokin ryhmä, kuten kivistä koostuva neliö, näyttää pienemmältä kuin oksanpätkistä muodostuva jono. Tällöin lapsi harjoittelee lukumäärien hahmottamista ja laskemista; Brunerin mallin mukaan liikutaan ikonisella tasolla lapsen käyttäessä vahvasti visuaalista aistikanavaa yhdistääkseen mielessään näkemänsä lukumäärän oikeaan lukusanaan. Lapsi kertoo esimerkiksi, että ”Kiviä on enemmän kuin käpyjä.”, jolloin aikuisen on erityisen tärkeää kehua vastausta ja kysyä ”Miksi?” Tällöin lapsella voi olla myös tehtävänä perustella lukusanoja käyttäen lukumäärää, kuten”Kiviä on seitsemän, mutta käpyjä vain viisi”.

Kolmannella pisteellä voidaan toimia esimerkiksi pareittain. Yhdellä lapsella on pussi, jonne he laittavat vuorotellen jotain esinettä, esimerkiksi käpyjä. Toinen lapsi laittaa käden pussiin ja yrittää laskea esineiden lukumäärän, minkä jälkeen vaihdetaan osia. Tällä pisteellä on syytä ottaa huomioon alaspäin eriyttämisen mahdollinen tarve: kaikilla lapsilla lukumääräisyyden taju ei ole välttämättä kehittynyt vielä siten, että se kyettäisiin ilmaisemaan lukusanalla. Vaihtoehtona voisi siis olla, että lapsi voisi tunnustelun jälkeen esimerkiksi näyttää esineiden tai sormien avulla, kuinka monta esinettä hän mielestään tunnusteli. Pisteellä tapahtuva harjoittelu tapahtuu Brunerin mallin toiminnallisella ja ikonisella tasolla: lapsi on välittömässä kontaktissa konkretiavälineeseen eli pussissa oleviin esineisiin, joihin hän pyrkii liittämään joko lukusanan tai hahmottamaan niiden kappalemäärän.

Neljännellä pisteellä aikuinen asettaa hulavanteen maahan ja lapset saavat heittää noppaa (voidaan ottaa myös kaksi noppaa). Vanteen sisälle kerätään noppien silmäluvun verran ennalta sovittua luonnonmateriaalia. Kun esineet ovat vanteen sisällä, lasten tehtävänä on valita aikuiselta kortti, jossa on lukumäärää vastaava lukusymboli.

5.2 Geometria

Varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa tutustutaan lähtökohtaisesti geometrisiin perusmuotoihin eli ympyrään, kolmioon ja neliöön. Lasten taitotason mukaan voidaan tutustua myös viisi- ja suorakulmioon, mikäli aikuinen näin parhaaksi näkee. Geometrisia muotoja voidaan lähestyä liittämällä niihin perinteisiä ryhmäleikkejä, kuten hedelmäsalaatti sekä Twister, mutta leikkien ominaisuuksia hieman muuttaen.

Perinteinen hedelmäsalaattileikki voidaan mukauttaa geometriaan sopivaksi seuraavasti: aikuinen sijoittaa tyhjään tilaan, lattialle, riittävän suuria muotopaloja ennen opetushetkeä. Muotopalojen on oltava eri värisiä. Leikissä valitaan piirin keskelle huutaja, joka valitsee mielessään värin ja muodon, jonka hän huutaa, esimerkiksi “keltainen ympyrä”, jolloin kaikki keltaisen ympyrän päällä seisovat yrittävät vaihtaa paikkaa huutajan yrittäessä päästä itsekin huudetun muodon päälle.

Lattialle asetettavia värillisiä muotopaloja voidaan käyttää myös suositun Twister-pelin sääntöjen mukaan. Leikki toimii hyvin myös pienellä lapsimäärällä. Yksi lapsi kerrallaan toimii huutajana, jonka tehtävänä on valita raaja, muoto sekä väri. Aikuinen voi avustaa lasta päätöksessä. Huuto voi kuulua esimerkiksi “vasen käsi vihreään kolmioon”, jolloin kaikki muotojen päällä seisovat pyrkivät tottelemaan käskyä. Näissä esimerkkileikeissä harjoitellaan siis perusmuotojen nopeaa hahmottamista, mutta myös suuntakäsitteet vasen ja oikea nousevat luonnollisesti esiin.

5.3 Ohjelmointi

Ohjelmoinnin alkeet kuuluvat opetusta ohjaavissa asiakirjoissa (Opetushallitus 2018; 2014) harjoiteltaviin matemaattisiin taitoihin, ja tällä osa-alueella korostuvat usein tilan, tason ja säännönmukaisuuksien hahmottamisen sijainti- ja suhdekäsitteiden käyttö sekä syy-seuraussuhteen ymmärtäminen. Erilaiset robottitehtävät ja -leikit ovat hyviä ja lapsia motivoivia tapoja lähestyä tätä aihetta.

Seuraava tehtävä voidaan toteuttaa pareittain, mutta myös pienissä ryhmissä. Aikuinen on rakentanut opetustilaan labyrinttimaisen esteradan käyttäen hyödyksi huonekaluja ja muita suuria esineitä: laatikoita, pöytiä, tuoleja, palleja ja niin edelleen. Esterataan merkitään alku- ja päätepiste. Näitä voi olla useampiakin. Esterata kannattaa tehdä suljetuksi esimerkiksi teipillä lattiaan, jottei lapselle tule kiusausta ohjata kaveria päätepisteeseen oikaisemalla esteradan ulkopuolelta. Valitaan, kuka lapsista toimii käskytettävänä robottina. Muun ryhmän tai lapsen parin tehtävänä on ohjata suuntakäsitteitä eteen, vasemmalle, oikealle ja taakse hyödyntämällä robottilapsi päätepisteeseen. Jos tehtävä on lasten iästä ja taitotasosta riippuen suhteellisen helppo, voi sitä vaikeuttaa seuraavilla keinoilla:

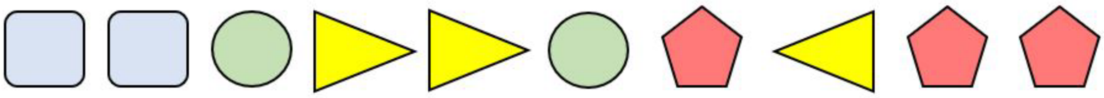
Lisähaaste 1: Lapsille annetaan tehtäväksi tutkia esterataa hetki, jonka jälkeen heidän tehtävänään on laatia oikeat suunnat sisältävä komentosarja, joka luetaan robotille. Komentosarja voisi olla esimerkiksi “Kolme askelta eteen, askel vasempaan, kaksi askelta eteen, askel oikeaan” ja niin edelleen.

Lisähaaste 2: Aikuinen laatii ennen opetushetkeä esimerkiksi julisteelle tai älytaululle koodikartan, jossa jokaista sijaintikäsitettä vastaa oma geometrinen perusmuoto tai mikä tahansa muu symboli. Symbolien vastaavuudet voisivat olla esimerkiksi kolmio = askel eteen, ympyrä = askel vasempaan, neliö = askel oikeaan. Tehtävä toteutetaan siten, että lapset suunnittelevat yhdelle “robotille” reitin radan läpi kirjoittamalla muodoista koostuvan koodin, joka voisi näyttää esimerkiksi kuvan 1 kaltaiselta:

Kuva 1. Kulkusuuntaohjeet geometrisin perusmuodoin ilmaistuna

Toteutusvaihtoehto: Tehtävää ei ole pakko toteuttaa siten, että yksi lapsi toimii robottina ja muut käskyttäjinä. Lapset voivat esimerkiksi pareittain laatia labyrintin piirtämällä sellaisen paperille tai muulle alustalle, tai rakentamalla sellaisen rakennussarjaa, kuten legoja käyttämällä. Robottina voi toimia jokin heidän valitsemansa lelu, jota liikutetaan ohjeiden mukaan (ajatus on sama kuin Bee-Bot-robottien käytössä). Sen jälkeen voidaan toteuttaa esimerkiksi lisähaaste 2, jossa lapset yrittävät hahmottaa robotille reitin geometrisella symbolikielellä.

Seuraava tehtävä on kestoltaan hieman lyhyempi, eli se voidaan toteuttaa esimerkiksi yhteisessä aamupiirissä. Tehtävään yhdistetään geometristen muotojen lisäksi liikunnallisuus. Edellisen tehtävän tapaan aikuinen näyttää lapsille valitsemallaan havaintovälineellä (äly- tai fläppitaulu, juliste, geometriset palat) esimerkiksi perusmuodot ympyrän, kolmion ja neliön. Voidaan ottaa lisäksi myös neljäs muoto tai symboli, esimerkiksi viisikulmio, tähti tai sydän. Kullekin muodolle on sovittu oma liike, kuten ympyrä = kyykkyhyppy, kolmio = kulkusuunnan vaihdos, neliö = pyörähdys ympäri ja sydän = taputus. Tehtävässä aikuinen toimii aluksi robottina ja lapset saavat laatia muodoista aamuliikunnan robotille. Liikuntakoodi (ks. kuva 2) voisi näyttää esimerkiksi seuraavalta aiemman esimerkin tyylisesti:



Kuva 2. Esimerkki liikuntakoodista geometrisilla perusmuodoilla ilmaistuna

Toimintona tämä geometrinen koodi kuuluisi siis kaksi pyörähdystä ympäri, kyykkyhyppy, kaksi askelta oikeaan, pyörähdys ympäri, taputus, askel vasempaan ja kaksi taputusta. Kun aikuinen on toiminut alussa esimerkkinä, voidaan ryhtyä toimimaan myös pareittain siten, että toimitaan vuorotellen robottina ja koodin keksijänä.

5.4 Mittaaminen

Mittaamisessa on hyvä tutustua muutamaan yleiseen ja yksinkertaiseen mittavälineeseen sekä käyttää lapsen omia kehonosia sekä arkisia esineitä mittavälineinä. Lapsista on usein hauska mitata esimerkiksi hyllyjen, pöytien, kirjojen tai lasten itsensä pituuksia käyttämällä jotain epästandardia mittavälinettä ja pyytää lapsia tekemään arvio mitattavan asian pituudesta ennen mittaustehtävää. Tämän jälkeen omaa arviota voidaan verrata varsinaiseen tulokseen.

Tehtävissä on hyvä ottaa huomioon, että monien asioiden pituudet, kuten huonekalujen tai lasten pituudet, ilmaistaan heidän ymmärrystasolleen helposti liian suurilla standardeilla mitoilla. Esimerkiksi ilmaisu ”120 senttimetriä” liikkuu helposti pienen lapsen lukusuuruuksien käsityskyvyn ulkopuolella. Tällöin voidaan esimerkiksi mitata lasten pituuksia teipillä seinään, jolloin pituuksia voidaan vertailla visuaalisesti näköaistin avulla. Tällaisen mittauksen voi suorittaa vaikka syksyllä, ja kevään puolella mittaus voidaan toistaa lapsissa tapahtuneen pituuden muutoksen havainnoimiseksi. Toimintaan yhdistyy tilastointiin tutustuminen implisiittisesti.

Mittaamiseen tutustumista epästandardeilla mitoilla voidaan harjoitella myös seuraavasti: aikuinen näyttää lapsille muutamaa mittavälinettä, esimerkiksi viivointa, rullamittaa ja tauluviivainta. Pohditaan aluksi *mittaamisen* käsitettä: ”Oletko sinä mitannut jotain?”, ”Onko sinun pituuttasi mitattu kotona?”, ”Mitä tällä voisit mitata?” Näissä keskusteluissa on hyvä varmistaa, että käsitteet *pitkä, lyhyt, yhtä pitkä* sekä komparatiivit *pidempi* ja *lyhyempi* nousevat esiin. Lapsille on tyypillistä, että tämänkaltaisessa keskustelussa nousee esille myös arjessa, kuten keittiössä tapahtuva mittaaminen. Havaintoja kehutaan, ja korostetaan tarvittaessa pituuden mittaamisen ero esimerkiksi määrän mittaamiseen.

Seuraavaksi toimitaan pareittain tai kolmen hengen ryhmissä. Useampia aikuisia on hyvä olla mukana auttamassa työskentelyssä. Annetaan lapsille jokin epästandardi mittaväline, kuten oma kenkä tai jalka, leluauto, kynä, kyynärä tai muu vastaava. Lapset valitsevat yhden esineen ja arvioivat, kuinka monta valitsemansa mitan pituutta se voisi olla; esimerkiksi kuinka monta kengän mittaa on pöydän pituus. Tämän jälkeen suoritetaan mittaaminen ja verrataan tulosta omaan arvioon. Tehtävässä nousee esille mittaamisen käsitteen lisäksi arvioinnin ja vertailun harjoittelu. Lukukäsite kulkee mittaamisessa mukana, sillä lukusanoja käytetään havainnollistamaan ajatuksessa käsiteltäviä lukumääriä: ”Pöytä oli kahdeksan kenkää pitkä” ja niin edelleen.

5.5 Tilastointi

Tilastointiin voidaan tutustua luonnollisesti monin eri keinoin, mutta lapsille luontainen keino omaksua tilastoinnin perusperiaatteita voidaan toteuttaa esimerkiksi laatimalla mielipidemittauksia päiväkodin ja esikoulun arkeen liittyvästä toiminnasta. Lasten on hyvä antaa äänestää omaa mielipidettään visuaalista välinettä käyttäen. Tällöin tilastointiin voidaan yhdistää lukukäsitteen harjoittelua Brunerin mallin ikonisella tasolla liikkuen, esimerkiksi seuraavan ruokailuun perustuvan tilastointiesimerkin mukaan:

Ruokailun yhteydessä asetetaan seinälle kuva päivän ruoasta. Kuvan yhteydessä on oltava tyhjää tilaa, johon lapset voivat äänestää esimerkiksi post-it -lapuilla. Ohjeistetaan lapsille, että jos hän piti päivän ruoasta, hän voi käydä asettamassa ruokakuvan alle post-it -lapun. Kokeilua jatketaan viikon verran. Toisella viikolla palataan kuvaseinälle ja pohditaan, mikä edellisviikon aterioista oli pidetyin? Miksi? Keskustelu ja päätelmät tapahtuvat vertaamalla lukumäärien suuruuksia keskenään, ja lukusanojen sekä mahdollisesti myös lukusymbolien liittäminen suosikkiruokiin tekee tulosten tarkastelusta tehokkaampaa ja mielekkäämpää.

5.6 Aikakäsite

Aikakäsitteeseen tutustumisessa voidaan hyödyntää monia eri välineitä. Näitä ovat esimerkiksi kello, viikonpäivät ja kalenterikuukaudet. Sen lisäksi, että aikakäsitteen sisältöihin kuuluvat viikonpäivien ja kuukausien nimien opettelu, nousevat myös lukukäsitteen ja lukujonotaitojen harjoittelu esille tätä aihepiiriä käsitellessä.

Yleinen ja hyvä päivän aloitukseen sidottava rutiini on tarkastella yhdessä kalenteria. Tämän hetken yhteydessä voidaan katsoa ja kysyä, mikä päivä tänään on, ja mahdollisesti myös monesko päivä on kyseessä. Tässä vaaditaan opetushenkilön arviointikykyä: lukujonotaidot vielä kehittyvät pienillä lapsilla, ja järjestysluvut lausutaan eri tavoin kuin lukujonossa ilmenevät numerot (vrt. *yksi, kaksi, kolme; ensimmäinen, toinen, kolmas*). Mahdollisuuksia havainnoida ja tuoda lukusymboleita esille lapselle sopivalla tasolla on tässäkin tapauksessa tarjolla.

Analogista kelloa sekä kuvia tai tarinoita hyödyntämällä voidaan tutustua kellonaikoihin visuaalisella tasolla. Voidaan esimerkiksi rakentaa kuvien avulla tavallisen päivän kulku, johon kuuluu herääminen ja aamutoimet, päiväkotiin tai esikouluun meneminen, vapaa-aika, päivällinen ja nukkumaanmeno. Näiden kuvien yhteydessä voidaan näyttää kellon viisareita siirtämällä, missä kohti kelloa viisarit tavallisesti näiden päivän toimien aikaan ovat. Jos saatavilla on esimerkiksi lastensatuja tai muita tarinoita, joissa päivän kulku tulee esille, voidaan kellonviisareita siirtää ja havainnollistaa tarinan lukemisen aikana.

Vanhemmat lapset voidaan tutustuttaa jo myös sekunnin ja minuutin käsitteisiin. Analogisen kellon sekuntiviisaria hyödyntämällä voidaan havainnoida, kuinka pitkään kestää yksi sekunti ja yksi minuutti. Jos lukusanat ja -symbolit ovat jo tuttuja, voidaan myös käyttää digitaalista kelloa. Tämän pohjalle voidaan tehdä lyhyitä, mutta hauskoja arvausleikkejä: opetushenkilö pyytää lapsia esimerkiksi hyppäämään tai menemään kyykkyyn, kun hänen antamastaan merkistä on lapsen mielestä kulunut ennalta sovittu määrä sekunteja. Tässä harjoituksessa harjaannutetaan lukukäsitettä, lukujonotaitoja ja sekunnin keston arviointikykyä.

6 Lopuksi

Tässä artikkelissa olen käsitellyt varhaismatemaattisten taitojen harjoittelua sekä niiden opettamista varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen viitekehyksessä. Kun varhaismatemaattisten taitojen harjoittelu sisällytetään osaksi varhaiskasvatusta ja esiopetusta siten, kuin ne ovat esitetty opetustyötä ohjaavissa asiakirjoissa, voidaan varmistua siitä, ettei olennaisia matemaattisten taitojen osa-alueita jää epähuomiossa käsittelemättä tai liian vähäiselle huomiolle. Olen myös esittänyt käytäntöön sovellettavia opetusesimerkkejä siten, että mainitut varhaismatemaattiset taidot nousevat niissä harjoiteltavien taitojen keskiöön. Luonnollisesti keinoja näiden taitojen harjoitteluun on olemassa käytännössä yhtä paljon kuin opetustoimen henkilöllä on luovuutta niiden toteuttamiseksi, mihin opettajan pedagoginen autonomia perustuu. Toivon kuitenkin, että tämän artikkelin avulla olen voinut nostaa esille teoreettisiin malleihin ja opetusasiakirjoihin pohjautuvia esimerkkejä, jotka ovat hyödynnettävissä hektisessä kasvatus- ja opetushenkilöstön arjessa, ja muokattavissa oman ryhmän tarpeisiin sopiviksi.

Lähteet

Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-bulletin, 18*(4), 63–74. https://bulletin.nmi.fi/wp-content/uploads/2016/09/aunio4_2008.pdf

Aunio, P., Heiskari, P., Van Luit, J.EH. & Vuorio, J.-M. (2015). The development of early numeracy skills in kindergarten in low-, average- and high-performing groups. *Journal of Early Childhood Research, 13*(1), 3-16. https://doi.org/10.1177/1476718X14538722

Bruner, J. (1967). Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Belknap Press.

Opetushallitus. (2014). Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Määräykset ja ohjeet 2016:1. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/esiopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Fuson, K.C. (1988). The Number-Word Sequence. An Overview of its Acquisition and Elaboration. Teoksessa: Fuson, K.C. (toim.). *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer New York.

Hannula-Sormunen, M.M., Lehtinen, E. & Räsänen, P. (2015). Preschool Children's Spontaneous Focusing on Numerosity, Subitizing, and Counting Skills as Predictors of Their Mathematical Performance Seven Years Later at School. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(2-3), 155-177. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016814

Kajetski, T. & Salminen, M. (2020). *Uusi Matikasta moneksi*. 2. Painos. Lasten Keskus.

Kinnunen, R. (2003). *Miksi kertolaskuun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana*. Oppimistutkimuksen keskus, Turun yliopisto.

Näveri, L. (2018). *Matikkaa lapsen kanssa*. ELLI Early Learning Oy.

Opetushallitus. (2018). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet. Määräykset ja ohjeet 2018:3a. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/varhaiskasvatussuunnitelman_perusteet.pdf

Vuorio, J.M. (2010). Matematiikka varhaiskasvatuksessa. Teoksessa: Korhonen, R., Rönkkö, M.L. & Aerila, J.A. (toim.). *Pienet oppimassa: kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen*. Turku: Turun yliopisto, 135-153.

Lärarens uppfattning av fortbildningshelheten LUMATIKKA i relation till sin yrkesvardag inom småbarnspedagogiken

Johanna Hirvi[1], Ann-Catherine Henriksson[2] och Gisela Neuman[3]

[1] Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier, Åbo Akademi
[2] Centret för livslångt lärande, Åbo Akademi
[3] Nykarleby stad

Abstrakt: De tidiga åren är en viktig tid då barnet med stöd av pedagogen och barnets naturliga nyfikenhet inhämtar matematisk kunskap och tränar sina matematiska färdigheter för att på sikt få den allmänbildning som alla människor behöver. För att stöda undervisningen i matematik skapades fortbildningen LUMATIKKA. Syftet med denna fallstudie är att belysa kursdeltagarens uppfattning av LUMATIKKA-fortbildningens betydelse för lärarens enskilda professionsutveckling. Det empiriska materialet i studien består av en kursdeltagares kursinlägg på kursplattformen och hennes återkoppling till materialet. De centrala forskningsfrågorna är: I) Vilka är lärarens uppfattningar av utvecklingsbehovet inom undervisningen i matematik? och II) Hur upplever läraren att kursen svarar på hens fortbildningsbehov? Studiens resultat visar att det finns ett kontinuerligt utvecklingsbehov inom det matematiska området bland pedagoger på fältet. LUMATIKKA-kursen, såväl gällande innehåll som upplägg, upplevs av läraren som ett välkommet stöd.

Nyckelord: Lärare inom småbarnspedagogik, förskoleundervisning, matematik, professionsutveckling, fortbildning

Kontakt: johanna.hirvi@abo.fi

1 Introduktion

Barn visar i tidig ålder en spontan och naturlig nyfikenhet för att utforska sin omgivning. Pedagogens uppgift blir att glädjas tillsammans med barnet och stödja barnet i att upptäcka helheter och sammanhang och hjälpa barnet att lägga ord på upptäckterna. Många av barnets upptäckter handlar om matematik. De tidiga åren är en viktig tid för att barnet ska skapa sig ett starkt självförtroende och detta inkluderar även att barnet ser sig själv som en matematiskt kunnig person. Matematisk kunskap och matematiska färdigheter är en allmänbildning som alla människor behöver. Ur ett jämlikhetsperspektiv är det därför viktigt att alla barn, oberoende av socioekonomiska eller andra bakgrundsfaktorer, får stöd i sitt lärande från tidiga år (Repo m.fl., 2020). Ett jämlikt utgångsläge är viktigt, i synnerhet då forskning visar att det tidiga lärandet i matematik har en gynnsam effekt på barnets fortsatta matematiklärande men även för framtida färdigheter i läsning, skrivning och naturvetenskap (Cross m.fl., 2009;

Duncan m.fl., 2007).

En styrka inom småbarnspedagogiken i Finland är en strävan efter att arbeta barncentrerat, att se hela barnet, och utgå från barnets olika behov. Matematikområdet ingår enligt *Grunderna för planen för småbarnspedagogik 2022* i lärområdet ”Jag utforskar min omgivning” (Utbildningsstyrelsen, 2022). Mycket forskning som berör barnets matematiska utveckling har gjorts under de senaste åren. De nya forskningsrönen påverkar i förlängningen styrdokumenten och kraven på lärarens kompetens inom småbarnspedagogiken ökar. För sitt uppdrag behöver därför lärare inom småbarnspedagogik förutom en grundutbildning även kontinuerligt lärande i form av fortbildningsmöjligheter (Karila, 2016; Karila m.fl., 2017).

Undervisnings- och kulturministeriets rapport (Eskelinen & Hjelt, 2017) visar dock att en stor del av lärarna inom småbarnspedagogik och förskola inte har möjlighet till fortbildning. För matematikområdets del är detta problematiskt eftersom området av lärarna kan upplevas som utmanande. Som ett svar på detta inleddes fortbildningshelheten LUMATIKKA (verksamhetsperiod åren 2018–2022) med finansiering från Utbildningsstyrelsen. Liksom i de övriga kurserna inom fortbildningshelheten kan kursdeltagaren i LUMATIKKA-kursen för lärare inom småbarnspedagogik och förskola genomföra kursen helt på distans och enligt en individuell tidtabell.

2 Teoretisk bakgrund

Studiens teoretiska referensram tar avstamp i lärares professionsutveckling. Med fokus på matematiska delområden som beskrivs i styrdokumenten presenteras sedan forskningsresultat kring lekens och olika språkliga färdigheters betydelse för barnets matematiska utveckling.

2.1 Ämnesdidaktisk professionsutveckling inom småbarnspedagogik och förskoleundervisning

Lärares professionsutveckling kan definieras som lärarnas lärande, det vill säga hur lärare inhämtar ny kunskap och hur de tillämpar kunskapen i praktiken i arbetet med barn (Avalos, 2011; Postholm, 2012). Lärares professionsutveckling ur ett mer allmänt perspektiv har som mål att bredda och fördjupa lärares kunskaper, inte bara inom ett visst specifikt område utan även att ge en fördjupning i både didaktiskt och pedagogiskt tänkande (Postholm, 2012) vilket ökar sannolikheten för att lärare med tiden anammar nya arbetsmetoder i sin undervisning (Avalos, 2011). Lärare inom småbarnspedagogik behöver besitta färdigheter som samarbets- och interaktionsförmåga, pedagogisk och kontextuell kunskap samt reflekterande praxis (Karila & Nummenmaa, 2001). Lärarprofessionen innebär framför allt färdigheterna att identifiera och differentiera undervisningsstrategier som lämpar sig för de barn lärarna möter, utgående från barnens tidigare erfarenheter och intressen (Maskit & Firstater, 2016).

Internationell forskning framhåller att undervisningen inom småbarnspedagogiken (inklusive förskoleundervisningen) lägger grunden för barns fortsatta lärande i naturvetenskaper, teknik, problemlösning och innovativt tänkande samt matematik (*Science, Technology, Engineering and Mathematics, STEM*) (Campbell m.fl., 2018; MacDonald m.fl., 2020). NCU-rapporten (KARVI) (Repo m.fl., 2020), gällande kvalitet i småbarnspedagogik i Finland, lyfter fram behovet av att stötta lärares kunnande inom STEM-området. Lärarna behöver framför allt stöd för att kunna utgå från barnens förundran och nyfikenhet över natur, miljö, tekniska fenomen och matematik i samband med planeringen av den didaktiska STEM-undervisningen. Enligt Pramling och Pramling Samuelsson (2011) förväntas lärare inom småbarnspedagogik bemästra en bred kunskap för att erbjuda ett så mångsidigt lärande som möjligt för barn. Dessa förväntningar skapar enligt Björklund och Ahlskog-Björkman (2018) ett pedagogiskt dilemma då lärares intresse för ämnet och lärarens ämneskunskaper styr valet av fokus i undervisningen (jfr. MacDonald m.fl., 2020; Oppermann m.fl., 2016).

Shulman (1986; 1987) var en av de första att införa begreppet *pedagogical content knowledge (PCK)* och hans teoretiska modell har varit vägledande för en stor del av forskningen kring olika dimensioner av lärarens didaktiska ämneskompetens (se figur 1). PCK är enligt Shulman den kunskap som läraren bygger upp i sin undervisning inom ett visst läroämne och PCK påverkas av kunskapen kring ämnesinnehållet (*subject matter knowledge, SMK*), den pedagogiska kunskapen (*pedagogical knowledge, PK*) och kunskapen om kontexten (*knowledge of context, KofC*). Denna påverkan sker i bägge riktningarna och samtliga tre delområden är betydelsefulla. Den pedagogiska kunskapen handlar om lärarens syn på lärande, lärarens målsättningar, rutiner och instruktioner medan kunskapen om kontexten omfattar kunskap som berör det enskilda barnet, enheten och samhället.

Figur 1. Lärarens pedagogiska ämneskunskap (bearbetad efter Shulman, 1986)

Lärare inom småbarnspedagogik kommunicerar en viss osäkerhet gällande innebörden av och målet med STEM (Vartiainen & Kumpulainen, 2020). Forskare för fram att lärarna till och med kan uppleva en rädsla i samband med STEM-innehållet (Cohrssen & Page, 2016; Hedlin & Gunnarsson, 2014; Vartiainen, 2021). Tillgång till fortbildning kan ge läraren en tydligare och mer positiv bild av STEM-undervisning (Alexander m.fl., 2014; Bers m.fl., 2013; DeJarnette, 2018; Jamil m.fl., 2018). För att didaktik och innehåll kring STEM verkligen skall implementeras i undervisningen behöver fortbildningen vara tidsmässigt tillräckligt omfattande för att vara kvalitativ och ge deltagaren möjlighet till reflektion och diskussion tillsammans med andra deltagare (Garet m.fl., 2001; Guskey, 2002; Kurtén & Henriksson, 2021; Ralston m.fl., 2013). I USA har exempelvis (Brenneman m.fl., 2019) använt en modell för fortbildning kring STEM där läraren inom småbarnspedagogik har möjlighet att inhämta aktuell kunskap, diskutera i smågrupp med andra deltagare, reflektera kring innehållet och få feedback på undervisningsaktiviteter. Motsvarande positiva resultat av långsiktig och flerformad fortbildning specifikt kring matematikområdet beskrivs exempelvis av Rudd med flera, (2009). Lärarfortbildningar kring STEM behöver lyfta fram betydelsen av kritiskt tänkande, undersökande arbetssätt och problemlösningsuppgifter för att lärarna i undervisningen ska kunna lägga mer fokus på att utveckla barnens färdigheter (se bild 1) framom ämneskunskaper (DeJarnette, 2018).

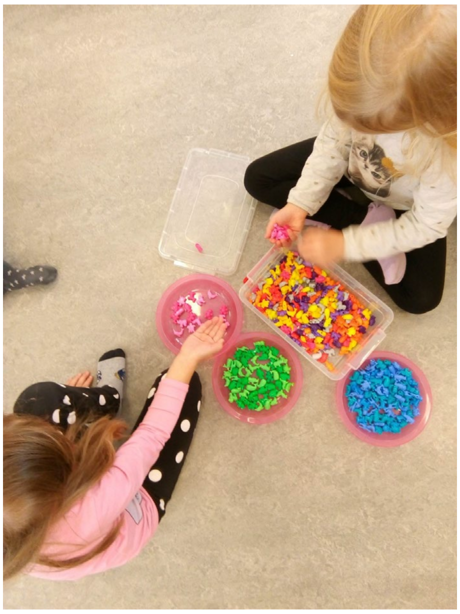


Bild 1. Sorteringslek.
(CC BY-SA 4.0 Gisela Neuman)

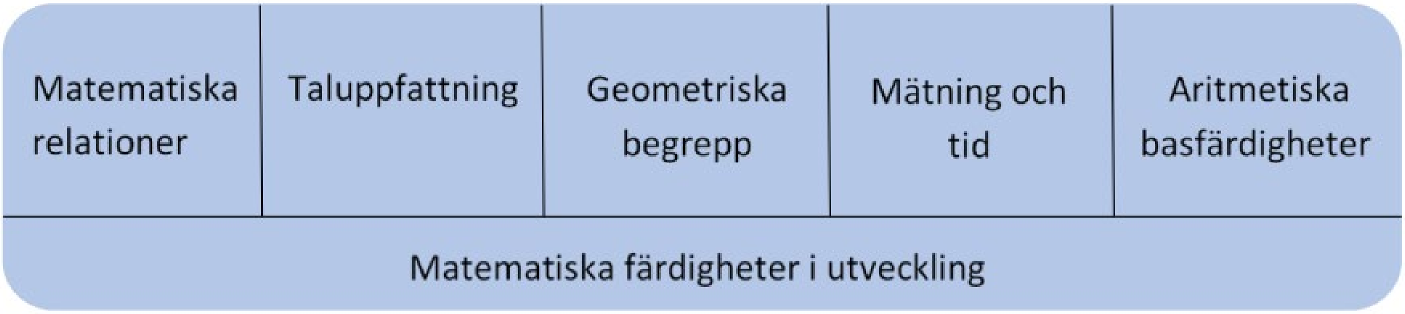
2.2 Matematik för barn under skolåldern

Vid planeringen av matematikteman för barn under skolåldern behöver läraren ta avstamp i de rådande styrdokumenten. Lekens viktiga roll i upptäckandet av matematik får inte glömmas bort. Lärarens sätt att kommunicera matematik blir en väsentlig del av ämnesöverskridande undervisning och matematikundervisningen specifikt, men en medvetenhet om detta är även viktig i all annan verksamhet tillsammans med barnen.

Styrdokumenten

Undervisningen inom småbarnspedagogiken har sin grund i en helhetsmässig syn på lärande som tar avstamp i styrdokumentets lär- och kompetensområden, framom enskilda skolämnen (Utbildningsstyrelsen, 2018). Denna helhetsmässiga syn på lärande och undervisning ställer krav på lärarna inom småbarnspedagogik. För att STEM-undervisningen, inklusive undervisning inom matematikområdet, ska lyckas behöver den ha en koppling till styrdokumenten (Hobbs m.fl., 2018; Hunter-Doniger, 2021). *Grunderna för planen för småbarnspedagogik 2018* (Utbildningsstyrelsen, 2018) förespråkar att barn ska få ta del av lärområdet *Jag utforskar min omgivning* genom att lärarna handleder barn att upptäcka och undersöka matematik, naturvetenskap, teknik och hållbarhetsfrågor i vardagen. Utmaningen för lärare, som arbetar med barn under skolåldern, blir framförallt att planera en åldersadekvat ämnesöverskridande STEM-undervisning (Repo m.fl., 2019; Vartiainen, 2021).

Grunderna för läroplanen för försöket med tvåårig förskoleundervisning 2021 (Utbildningsstyrelsen, 2021) beskriver följande centrala delområden för barnens matematiska utveckling som väsentliga delar av förskoleundervisningen (se figur 2):



Figur 2. Centrala delområden för barnens matematiska utveckling i förskoleundervisningen (Utbildningsstyrelsen, 2021, s. 54).

- *Matematiska färdigheter i utveckling* – grundtanken här är att barn under skoláldern i egen takt får upptäcka och erfara matematik på ett glädjefullt sätt. Barn ska även utmanas i sitt matematiska tänkande utifrån egna förutsättningar. Lärarens roll och pedagogiska kunnande är väsentlig för att utmana barn på lagom nivå.
- *Matematiska relationer* – barn behöver via leken få öva på att klassificera, jämföra, får syn på serier/mönster, identifiera förändring och bli bekant med begrepp som flera, färre och lika många samt andra jämförelsebegrepp (jfr. Kajetski m.fl., 2018).
- *Taluppfattning* – inbegriper en-till-en korrespondens, subitisering och kardinalitet.
- *Geometriska begrepp* – inbegriper rumsliga begrepp, lokalisering och placering, rörelse, geometriska figurer och former.
- *Mätning och tid* – inbegriper tid, längd, avstånd, area, volym, vikt och temperatur.
- *Aritmetiska basfärdigheter* – är kopplat till långtidsminnet (till exempel 2+2=4). Att räkna på fingrarna är en strategi som yngre barn ofta använder sig av. Utvecklingen av flexibla och mångsidiga räknestrategier kräver att barnet lär sig att förstå och tillämpa olika räkneprinciper. I förskoleundervisningen brukar de flesta barn öva på att utföra olika uträkningar där räkneprinciper för addition och subtraktion övas.

Motsvarande delområden återfinns även i de gällande styrdokumenten för småbarnspedagogiken (Utbildningsstyrelsen, 2018) och för förskoleundervisningen (Utbildningsstyrelsen, 2014).

Enligt Marton med flera (2004) behöver pedagogen ha en god kunskap kring målsättningar och innehållsområden i styrdokumenten för att kunna fastställa lärandemålen för barngruppen och enskilda barn, det avsedda objektet för lärande (*intended object of learning*). Genom olika planerade och i stunden uppkomna aktiviteter (*enacted object of learning*) stöder och handleder sedan pedagogen barnens lärande mot dessa lärandemål. Vad det enskilda barnet sedan lär sig under och genom dessa aktiviteter (*the lived object of learning*) kan variera mycket från barn till barn. Pedagogens uppgift att skapa goda förutsättningar för lärande och ta vara på de pedagogiska stunderna beskrivs i det följande av forskarna Camilla Björklund och Hanna Palmér.

> "Matematikundervisningen innebär således inte förmedling av kunskaper utan att förskolläraren går in i en process av utforskande, skapande och förhandling av mening tillsammans med ett eller flera barn. För att undervisning ska ske är det inte tillräckligt att matematiska objekt, egenskaper eller processer är del av en lek eller aktivitet utan undervisningen är *vad* förskolläraren gör av lärandemöjligheten tillsammans med barnen." (Björklund & Palmér, 2018, s. 209)

Den kontinuerliga pedagogiska dokumentationen blir därför värdefull för att pedagogen ska kunna få en bild av vilken den följande utmaningen kunde vara för det enskilda barnet.

Matematik och barnets språkliga utveckling

Pedagogens uppgift är enligt McCray och Chen (2012) att stöda barnet att bygga upp de initiala kopplingarna mellan matematiska begrepp och förfaranden. Det tyder på att läraren i alla sammanhang, såväl i de planerade sekvenserna som under barnens fria lek, bör främja dessa kopplingar och utöva pedagogik utifrån denna förståelse om det matematiska innehållets natur. En betydande del av den pedagogiska innehållskunskapen som behövs kan beskrivas som lärares förmåga att hjälpa barn att se och förstå matematiken i omvärlden.

Barnet i sin tur behöver utveckla ett ordförråd så att hen kan kommunicera matematik, det vill säga beskriva, förklara, berätta något för någon annan eller föra resonemang (Björklund & Palmér, 2018). Att barnet lär sig att kommunicera matematik ligger även som grund för att bilda sig en förståelse för hur hen kan förstå innebörden i olika matematiska begrepp och hur lösa olika typer av matematiska uppgifter. För barn under skolåldern är instruktionerna som ges i samband med olika uppgifter i första hand verbala. Barnet behöver förstå innehållet i instruktionen (Björklund,

2013) och klara av att plocka ut den mest väsentliga informationen ur (verbala) instruktionen. Utöver detta behöver barnet kunna planera en lösningsmodell (eller fler) för att slutföra uppgiften. Barnet behöver även behärska det (eller de) räknesätt som uppgiften förutsätter. Detta betyder inte att barn behöver kunna siffrornas utseende, utan framför allt innebörden av till exempel talet tre, fem eller nio. Slutligen behöver läraren uppmuntra barnet till att jämföra sitt resultat med frågan som ställdes i uppgiften och fundera om resultatet är logiskt.

Leken och lekresponsiv undervisning

Leken har en central roll inom småbarnspedagogiken och förskoleundervisningen. I *Grunderna för planen för småbarnspedagogik 2022* (Utbildningsstyrelsen, 2022) framkommer att barnen har rätt att stifta bekantskap med matematiken på ett lekfullt sätt, där fokus ligger på barns glädje över både insikt och lärande.

Inom den lekresponsiva undervisningen (Pramling m.fl., 2019; Pramling & Wallerstedt, 2019) ses undervisning som responsiv lek, det vill säga leken blir en potentiell dimension i all typ av undervisande moment eller aktiviteter inom småbarnspedagogiken. Aktiviteter är något som man gemensamt går in i både som barn och lärare, framom att läraren endast ger instruktioner för hur olika aktiviteter ska utföras. Då målet är ett delat innehåll läggs grunden för intersubjektivitet, vilket i sin tur erbjuder barn att ta del av metakognitiv kommunikation och gemensamma reflektioner. När läraren utgår från lekresponsiv undervisning i förhållande till matematik bör läraren ta tillvara både planerade och spontana matematikstunder som uppkommer i vardagen (jfr. Oppermann m.fl., 2016). Läraren är lyhörd och responsiv till barnens tankar och funderingar och utmanar barnen i stunden (Björklund m.fl., 2018). För att läraren ska klara av detta behöver hen besitta pedagogisk ämneskunskap i vad matematik för barn under skoleåldern är (Björklund & Palmér, 2018; Oppermann m.fl., 2016).

Baserat på Bishops tankar (Helenius m.fl., 2020) inbegriper leken en förmåga att föreställa sig något - *Tänk om lövet är en fjäril?* Detta lägger grunden till att tänka hypotetiskt och är början till det abstrakta tänkandet. Då barnet modellerar abstraherar hen vissa drag från verkligheten. I leken formaliserar och ritualiserar barnet regler, procedurer och kriterier. Barnet lär sig även i leken att förutsäga, gissa, uppskatta och förmoda vad som skulle kunna hända samt att utforska tal, former, mått, lägen och argumentation. Bild 2 visar hur barnen argumenterat fram hur fordonen ska kategoriseras.

Bild 2. Kategorisering.

Ämnesöverskridande lärande

Under det senaste årtiondet har forskning inom STEM-undervisningen ökat (Campbell m.fl., 2018; DeJarnette, 2018). Flera forskare lyfter fram vikten av att barn utvecklar ett positivt förhållningssätt till STEM och för att detta ska ske behöver barn få ta del av konkreta och för barnen meningsfulla aktiviteter med vardagsanknuten koppling (Bagiati m.fl., 2010; Bybee & Fuchs, 2006; DeJarnette, 2012; Hunter-Doniger, 2021). Inom småbarnspedagogiken kan lärare naturligt erbjuda barn möjligheter att lekfullt upptäcka och utforska ämnesöverskridande STEM-aktiviteter, där till exempel naturvetenskap lätt kan undersökas sida vid sida med matematik och/eller teknik (Campbell m.fl., 2018; Magnusson & Bäckman, 2021). I samband med det ämnesöverskridande lärandet uppstår möjligheter att förena olika mångsidiga kompetenser med lärandet kring de olika lärområdena i styrdokumenten (Utbildningsstyrelsen, 2014).

I det ämnesöverskridande arbetet ställs också frågan om lärandemålen till sin spets. Småbarnspedagogik är en dynamisk process där flera lärandeobjekt finns men inte nödvändigtvis anges, och där de antas interagera tvärvetenskapligt (Björklund & Ahlskog-Björkman, 2018). Enligt Campbell med flera (2018) är lärare inom småbarnspedagogik bra på att erbjuda STEM-aktiviteter för barn och att dessa aktiviteter oftast tar avstamp i barns tidigare erfarenheter, kunskap och intressen. MacDonald m.fl. (2020) är av annan åsikt då det kommer till den pedagogiska STEM-undervisningen i arbete med yngre barn. Detta, eftersom lärare inom småbarnspedagogik oftast tenderar att planera enskilda specifika aktiviteter med fokus på ett STEM-ämne, utan att erbjuda barn ämnesöverskridande STEM-undervisning (MacDonald m.fl., 2020).

3 Syfte, forskningsfrågor och tillvägagångssätt

LUMATIKKA-kursen för lärare inom småbarnspedagogik och förskola utgör en del av fortbildningshelheten LUMATIKKA. Kursen har som mål att erbjuda verktyg för en matematikundervisning där barnen lär sig grundläggande matematiska färdigheter utifrån vardagen inom småbarnspedagogiken och där man jobbar såväl barnorienterat, fenomenbaserat och med fokus på åskådliggörande. Innehållsmässigt följer kursen lärandemålen och innehållsområdena i de nationella styrdokumenten för småbarnspedagogik och förskola. Exempel på temaområden från styrdokumenten som tas upp i kursen är taluppfattning, mätning och problemlösning. I kursen behandlas även teman som barnets matematiska utveckling, barnets förmatematiska kunskaper och färdigheter, matematik och barnets språkliga utveckling samt stödformer i matematik.

Syftet med denna artikel är att belysa deltagarens uppfattning av LUMATIKKA-fortbildningens betydelse för lärarens *enskilda* professionsutveckling. Forskningsfrågor som artikelns författare strävar efter att besvara är

I) Vilka är lärarens uppfattningar av utvecklingsbehovet inom undervisningen i matematik?

II) Hur uppfattar läraren att kursen *LUMATIKKA 2 – Matematik inom småbarnspedagogik och förskola – med barnet i centrum!* svarar på hennes fortbildningsbehov?

I artikeln tar författarna ett teoretiskt avstamp i tidigare forskning som berör lärarfortbildning inom småbarnspedagogik i allmänhet och inom det matematiska området specifikt. En av artikelförfattarna är en yrkesverksam lärare inom småbarnspedagogik och förskoleundervisning och i artikeln delger hon sina erfarenheter och reflektioner dels från den egna undervisningen och dels som deltagare i LUMATIKKA-kursen.

Artikeln är en fallstudie (Olsson & Sörensen, 2021) där en lärares kursinlägg under kursen LUMATIKKA 2 – Matematik inom småbarnspedagogik och förskola - med barnet i centrum! ligger som grund för studien. Lärarens kursinlägg på kursplattformen har fungerat som datamaterial. I denna studie har läraren fungerat både som objekt och medskribent. Målet har varit att läraren gör en återkoppling till sina kursinlägg och reflekterar kring dessa samt kopplar sina reflektioner till sin yrkesroll som lärare inom förskoleundervisningen.

4 Lärarens reflektion

Här följer ett utdrag ur lärarens egna reflektioner under och efter kursdeltagandet. Läraren reflekterar även kring hur kunskapen hen inhämtat under kursens implementeras i arbetet tillsammans med barnen.

4.1 Lärarens arbetsvardag

Arbetssättet i förskoleundervisningen idag är en balansgång mellan ett schemalagt och ett utforskande arbetssätt. Det schemalagda arbetssättet fungerar som en introduktion för barnen. Det utforskande arbetssättet används mer vid icke schemalagda tillfällen. I förskoleundervisningen talas det ofta om teman, projekt och ämnesöverskridande undervisning. Ibland känns det som om jag skulle behöva vara tusenkonstnär i mitt jobb som förskollärare. Jag vill kunna kombinera barnens spontana lärande med teman och uppgifter som planerats av mig. Mitt mål är att tillvarata så mycket som möjligt av barnens idéer och tidigare kunskaper samt att jobba ämnesöverskridande och bibehålla barnens lust att lära. Jag vet att en del verksamhet i förskolan blir för vuxenstyrd och resultatinriktad ibland. Med avstamp i dessa tankar har jag valt att fortbilda mig inom det matematiska området och senast deltagit i LUMATIKKA. Genom att delta i fortbildningar kan jag få fler konkreta verktyg att använda mig av som förskollärare, få feedback på min professionalitet av medstuderande och utbildningsanordnare samt inblick i det som är aktuellt inom forskningen.

Kommunen i vilken jag jobbar har gjort upp en läroplan som baserar sig på de nationella styrdokumenten. Det kommunala, det som anpassats till regionen, är inte särpräglat utan kommunen använder sig av formuleringarna som finns i den nationella läroplanen för förskoleundervisning. Den kommunala läroplanen ger mig inte mycket stoff att jobba utgående från. I stället har jag valt att vända mig till kollegor och fortbildningsanordnare för att få mer konkreta verktyg som hjälper mig i mitt jobb som förskollärare. I förskolan där jag jobbar finns ett lärarlag bestående av fyra förskollärare samt flera team där förskollärarna och klasslärarna i årskurs 1–6 samarbetar. Planering inom lärarlaget och teamen görs varje vecka. Årsplanering, tyngdpunktsområden och den veckovisa planeringen gås igenom under dessa möten.

I förskolan jobbar jag för tillfället jämsides med en annan förskollärare. Planeringen sker gemensamt och utgår från temaområden, barnens intressen och behov. Min kollega och jag planerar verksamheten med fokus på helheter för att ge barnen en känsla av sammanhang. Den nationella och kommunala läroplanen styr verksamheten. Vi konkretiserar målen i det dagliga arbetet med barnen. Material, diskussioner och idéer från LUMATIKKA sporrar mig att i samarbete med min kollega diskutera och utvärdera arbetssättet i förskoleundervisningen. Positivt är att LUMATIKKA riktar sig till lärare inom olika stadier och att jag på detta sätt får inblick i andra lärares undervisningssätt. Jag uppskattar de andra kursdeltagarnas och utbildningsanordnarens diskussioner och inlägg. Jag får i diskussionerna feedback på mitt sätt att arbeta med och ta fram matematiken i förskoleundervisningen.

4.2 Barns matematiska lärande

För att få en uppfattning om förskolebarns kunskapsnivå har jag ofta använt mig av kartläggningsmaterial såsom LukiMat. Jag har även bedömt och iakttagit barnens lärande och spontana matematiska tänkande i förskolan genom att observera barnens förmatematiska kunskaper i vardagen. Genom uppgifter i LUMATIKKA har jag blivit mer uppmärksam på barnens naturliga uttryck för matematiskt tänkande. LUMATIKKA betonar att barnens egna matematiska observationer utgör grunden för utvecklandet av matematiskt tänkande. Genom att lyfta fram matematiken i barnens vardag börjar de småningom också inse att det finns matematik överallt. Ofta är arbetet ämnesöverskridande. Barnen skapar till exempel tillsammans en berättelse. Till berättelsen skapar de sedan figurer med hjälp av olika geometriska former. Förutom olika språkliga färdigheter tränar barnen i detta sin förståelse av de geometriska formerna och i det här fallet även symmetri (se bild 3).

Bild 3. Figur av olika geometriska former.
(CC BY-SA 4.0 Gisela Neuman)

Jag upplever att barn i förskoleåldern ibland kan ha svårigheter med att känna till antalet fingrar. Dessa barn kan också ha generella matematiksvårigheter. Ramsräkning är vanligen lätt för barn men påvisar inte om barnen har förmågan att uppfatta antal.

Bild 4. Lekmaterial för att öva på antalsuppfattningen.
(CC BY-SA 4.0 Gisela Neuman)

Jag har, med antalsuppfattning i åtanke, planerat in flera tillfällen med matematikstationer där barnen fått öva på talen 1–5 genom att använda djur, klossar, pussel, datorprogram, brädspel samt olika kort (se bild 4). LUMATIKKA betonar val av undervisningsmetoder och att olika hjälpmedel och redskap kan stimulera barnen till att identifiera, jämföra och rangordna (se bild 5). Jag vill att barnen verbaliserar. Jag avsätter tid under dessa tillfällen så att jag tillsammans med barnen kan diskutera vad de har upptäckt och hur de har löst uppgifter. Jag vill inte gå in och korrigera barnen här utan väljer att lyssna och iaktta.

Bild 5. Lek med nallar.

När barnen har lekt med djur och andra leksaker har jag valt att gå med i leken och tillsammans med barnen gruppera, räkna, jämföra och laborera (se bild 5 och 6). Jag måste prioritera och ta mig tid till detta som förskollärare. När jag sitter ner med barnen kan jag ställa produktiva frågor och följa barnens resonemang, som jag sedan bör ta i beaktande i den planerade verksamheten i förskolan.

Bild 6. Lek med bilar (kategorisering).

I och med LUMATIKKA har jag blivit mer uppmärksam på barnens samarbete och att inlärning även sker kollaborativt. Jag planerar smågruppsarbete eller låter barnen välja par i ledda eller fria aktiviteter. Jag har upptäckt att barnen tycker om att ta en vuxenroll och vid flera tillfällen har jag bett barnen hjälpa andra barn med olika uppgifter eller praktiska göromål. Vilka härliga diskussioner det kan uppstå i dessa situationer. Jag kan då få feedback på hur barnen uppfattat och kan använda begrepp som jag har introducerat.

Bild 7. Antalsuppfattning.

Utmärkande för barn med svag antalsuppfattning är att stödet/situationerna där barnen får öva och utveckla sin förmåga behöver vara många och varierande (se bild 7). Jag har med fortbildningens hjälp fått fördjupad kunskap i de olika delar som hör samman med, förstärker och utvecklar barns matematiska förmåga. Som lärare inom förskoleundervisning behöver jag använda matematikglasögon och upptäcka matematiken som omger oss i vardagen.

4.3 Upptäck matematiken i Kents vardag

I följande berättelse om Kents vardag illustreras barnets möte med matematiken under en dag. Kents berättelse är ett av lärarens inlägg under delmomentet *Matematik i vardagen* inom LUMATIKKA-kursen.

> Kent, 6 år, väcks varje morgon av sin pappa. Han tar på sig *kläderna i en viss ordning*. Kanske är det lättast med strumpor före långbyxor? Till frukost äter Kent gärna *två smörgåsar med ost och korv samt ett glas mjölk*. Pappa kör Kent till förskolan. Kent vet att han *hinner läsa en serietidning under bilturen*.
>
> När Kent kommer fram hälsar hans lärare honom god morgon och berättar att det är lekstund ute på gården i *30 minuter*. När lekstunden är slut ställer sig barnen *på kö och läraren räknar* barnen när de går in. I samlingen kollas frånvaron och ett *stapeldiagram* sätts upp på tavlan. Läraren berättar om dagens program och det diskuteras *hur många dagar* det är kvar innan det blir helg.
>
> Idag har barnen gymnastik så de går till gymnastiksalen. Läraren har tagit fram redskap och byggt stationer. Vid varje station finns en *kon med en siffra* på.

> Barnen rör sig mellan de olika stationerna *parvis*. Läraren ger en signal när det är *tid att byta* station.
>
> I kön till lunchen frågar läraren vem som är *först, andra, tredje* osv. *Matramsan* går såhär. Tio, nio, åtta, sju. Kan du räkna bakåt nu? Sex, fem, fyra. Kan du tungan styra?... Till lunch får barnen knackkorv och potatismos. Kent har tagit två korvar och frågar läraren *hur många* han får äta sammanlagt. Läraren svarar fyra korvar så då går Kent och hämtar två till.
>
> På lekstunden vill Kent leka med djur och han får sällskap av Viktor. Viktor tycker att de har *för få* dinosaurier så de går till en annan förskolegrupp och frågar om de får låna *tre stycken* dinosaurier. Kent tycker om att sortera och *ordnar djuren* utifrån habitat. Pojkarna leker på en *cirkelformad matta*. För att barnen ska veta *hur lång* lekstunden är sätter läraren på en klocka på tavlan som räknar ner.
>
> På sagostunden läser läraren boken "Petter och hans fyra getter" och tillsammans funderar de på *hur många* getter Petter hade, vilken som var den *första* geten, vilken färg den *tredje* geten hade och *hur många* träd den vita geten åt upp?
>
> Barnen klär på sig och går ut. Kent kommer ihåg att hans pappa bad honom kolla ifall han har *två par vantar* i sin hylla. *Snart* börjar eftis och läraren säger tack för idag.

Jag har beskrivit ett förskolebarns vardag, från väckning på morgonen tills eftermiddagsverksamheten börjar. Texten/orden som markerats i kursiv stil har koppling till matematik i barnets vardag. Matematiken är ständigt närvarande genom strukturer, system, begrepp, dialog, lek och laborerande under Kents dag. Genom att läraren belyser, pappan strukturerar och Kent upplever matematik formas och utvecklas Kents matematiska förmåga. LUMATIKKA-fortbildningsprogrammet har stärkt mig i min tro att matematik som ett lärområde inom förskoleundervisningen ger barnen verktyg som de kan tillämpa i olika sammanhang under sin fortsatta lärstig.

4.4 Fortbildningens inverkan

Jag har genom fortbildningen stärkts i min uppfattning om att barnens uttryck för matematiskt tänkande bör tas i beaktande och att förskoleundervisningen borde planeras så att den ska stimulera och ta i akt barnens förutsättningar för matematik. LUMATIKKA har fått mig att på ett mera mångvetenskapligt sätt jobba med matematik. Jag kan med större säkerhet tacka nej till omgivningens önskan om schemalagda matematiklektioner i förskoleundervisningen samt införskaffandet av läromedel.

Jag har under en längre period intresserat mig för ämnet matematik och kommer även i fortsättningen att delta i fortbildningar inom området. LUMATIKKA betonar att det är bra att flera kollegor från samma enhet deltar för att få ett större utbyte och kunna implementera tankarna från fortbildningen. Detta har tyvärr inte lyckats inom min enhet. Jag har i alla fall under gemensamma planeringstillfällen på min enhet försökt visa på innehållet i LUMATIKKA. I fortsättningen önskar jag fortbildning som parallellt riktar sig till lärare inom förskoleundervisning och nybörjarundervisning. Övergångar mellan stadier, lärares varierande arbetssätt och förväntningar på innehåll i undervisning intresserar mig mycket.

5 Diskussion

Artikelns syfte är att belysa den deltagande lärarens uppfattning av LUMATIKKA-fortbildningens betydelse för sin professionsutveckling. Mot bakgrund av forskningsfrågorna och tidigare forskningsresultat diskuteras i detta kapitel samstämmigheten mellan lärarens reflektioner och kursens innehåll och upplägg.

5.1 Lärarens reflektioner kring vikten av ämneskunskap inom matematikområdet

Det förekommer en god samstämmighet mellan lärarens tankar ovan kring sin pedagogiska ämneskunskap inom matematikområdet och tidigare forskning. Läraren framhåller vikten av att vara lyhörd för hur barnen kommunicerar matematik i leken för att kunna fånga den pedagogiska stunden, vilket även är något som tidigare forskning lyfter fram (Björklund m.fl., 2018; Pramling & Wallerstedt, 2019). Forskning visar även att det är viktigt att lärare inom småbarnspedagogik besitter ämneskunskaper i matematik och kunskap om hur barn utvecklar sitt matematiska tänkande (jmf. Björklund & Palmér, 2018; Oppermann m.fl., 2016).

Läraren nämner även att en lärare behöver besitta kunskap om de olika stegen i barns matematiska utveckling för att veta var olika stödåtgärder eller utmaningar behöver läggas in. Detta kan läraren ta reda på med hjälp av en fortgående formativ bedömning av barnets matematiska färdigheter, såsom kartläggningsmaterialet LukiMat. Denna formativa bedömning fungerar som stöd för lärarens didaktiska planering (Komara & Herron, 2012). Målet med bedömningen är att barnet utmanas på lagom nivå så att lärandet känns lustfyllt och roligt. Genom att läraren går med i barnens lek kan hen på ett lekfullt sätt bedöma barnens matematiska färdigheter kontinuerligt genom att bjuda in barnen till kommunikation och lyssna in barnens tankar kring olika matematiska problem (Björklund m.fl., 2018).

I alla undervisningssituationer fungerar läraren som en språklig förebild för barnen (McCray & Chen, 2012). Att detta även gäller användningen av olika matematiska begrepp lyfter läraren fram i sin redovisning. Som en god språklig förebild tar sig läraren tid att lyssna in vad barnen har för tankar och funderingar och ställa produktiva frågor för att bilda sig en uppfattning om hur de resonerar kring olika saker (Pramling m.fl., 2019; Pramling & Wallerstedt, 2019). Genom att läraren erbjuder barnen möjligheter att reflektera kring hur de tänkte förr och hur de tänker nu läggs en grund för metakognitiva samtal (Pramling m.fl., 2019; Pramling & Wallerstedt, 2019). Genom dessa metakognitiva samtal får läraren tillgång till värdefull information kring barnens tankar om deras eget lärande. Då dessa metakognitiva samtal sker i små grupper får barnen även en förståelse för hur andra tänker och resonerar kring samma saker och på så sätt kan barnen få en bredare förståelse till exempel för hur man kan tänka vid kategorisering av olika leksaker.

I data framkom att barn gärna tar rollen som lärare och stöttar sina vänner i olika uppgifter. Genom att läraren möjliggör arbete i par eller i smågrupper får barnen även ta del av olika situationer där de får öva på att argumentera för sina åsikter. Barn är även snabba på att stötta varandra i olika lärande- och leksituationer, vilket betyder att de är tvungna att sätta ord på matematiken i leken så att alla förstår vad leken handlar om (Helenius m.fl., 2020).

Läraren reflekterar ovan till synes helt med fokus på barnens matematiska kunnande och matematiska färdigheter. Enligt Björklund och Ahlskog-Björkman (2018) sker även mycket lärande inom småbarnspedagogiken utan att det var primärt planerat. I lärarens reflektioner framkommer följaktligen även en strävan efter att stöda barnets språkliga och sociala utveckling. Detta exemplifierar hen till exempel i samband med berättelseaktiviteten. Enligt läraren har hen efter deltagandet i LUMATIKKA-kursen börjat arbeta på ett mera mångvetenskapligt sätt med matematik.

5.2 Lärarens tankar om fortbildningen LUMATIKKA

Läraren betonar betydelsen av att kunna öppna upp målsättningar och innehåll i styrdokumenten med andra kursdeltagare och kursens handledare under kursens gång. Att fortbildningshelheterna behöver sträcka sig över en längre tid och ge upprepade möjligheter till diskussion och reflektion betonas även av forskare (jfr. Garet m.fl., 2001; Guskey, 2002; Kurtén & Henriksson, 2021; Ralston m.fl., 2013). Ett element i LUMATIKKA-kursen är även att den deltagande läraren kommunicerar kursens innehåll med sina kolleger på enheten, detta som ett led i strävan att öka den kollegiala diskussionen kring matematikområdet. Läraren nämner att det i detta skede ännu inte har varit möjligt för kollegerna att delta i kursen men den kollegiala diskussionen kring innehållet i kursen har inletts.

Läraren nämner att hen i samband med deltagandet i kursen har fått ta del av konkreta verktyg och material som kan användas i den egna undervisningen. Kursen har också gett hen insyn i den senaste forskningen inom området. Tack vare kursen upplever läraren att hen har fått en starkare insikt i sin egen tro att matematik som ett lärområde inom förskoleundervisningen ger barnen verktyg som de kan tillämpa i olika sammanhang under sin fortsatta lärstig (jfr. Cross m.fl., 2009; Duncan m.fl., 2007). Lärarens professionsutveckling, där läraren har möjlighet att bredda och fördjupa sina kunskaper inom ämnet men även didaktiskt och pedagogiskt, ökar sannolikheten för att lärare med tiden anammar nya arbetsmetoder i sin undervisning (Avalos, 2011; Postholm, 2012). Läraren i studien beskriver att kursen har fått hen att arbeta på ett mera mångvetenskapligt sätt med matematik. Hen kan nu med stärkt självförtroende genom fördjupade kunskaper argumentera för vikten av matematikens roll och innehåll i förskoleundervisningen. Matematiken sker via lek och upptäckter i vardagen där lärarens roll är att uppmuntra och utmana barnen till lärande.

6 Implikationer

I studien framkommer att läraren upplever LUMATIKKA-kursen som ett välkommet stöd för arbetet. Det finns dock ett fortsatt behov av fortbildning i matematik för lärare och annan personal inom småbarnspedagogik. För att nyinhämtad kunskap ska kunna implementeras i vardagen skulle det vara värdefullt att hela arbetsteamet skulle få möjlighet att delta tillsammans i fortbildning. Ledningens uppgift blir då att möjliggöra och uppmuntra personalens deltagande i fortbildning.

LUMATIKKA-fortbildningen som nu har en mer grundläggande karaktär kunde kompletteras med moduler som har mer åldersspecifikt fokus (personal som arbetar med barn i åldern 0–2, 3–4 och 5–6) och olika stadieövergripande helheter. Lärarens önskemål är också en modul som stöder personalens samsyn kring den matematiska progressionen i övergången mellan förskoleundervisningen och nybörjarundervisningen.

> "Läroplanen ger riktningen, barnens intressen och behov ger teman
> och lärarens kreativitet ger barnen möjlighet att utforska." (Neuman, 2021)

Referenser

Alexander, C., Knezek, G., Christensen, R., Tyler-Wood, T., & Bull, G. (2014). The Impact of Project-Based Learning on Pre-Service Teachers' Technology Attitudes and Skills. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *33*(3), 257–282.

Avalos, B. (2011). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years. *Teaching and Teacher Education*, *27*(1), 10–20. https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.08.007

Bagiati, A., Yoon, S. Y., Evangelou, D., & Ngambeki, I. (2010). Engineering Curricula in Early Education: Describing the Landscape of Open Resources. *Early Childhood Research & Practice*, *12*(2). https://eric.ed.gov/?id=EJ910909

Bers, M. U., Seddighin, S., & Sullivan, A. (2013). Ready for Robotics: Bringing Together the T and E of STEM in Early Childhood Teacher Education. *Journal of Technology and Teacher Education*, *21*(3), 355–377.

Björklund, C. (2013). *Vad räknas i förskolan? Matematik 3–5 år—Göteborgs universitets publikationer*. https://gup.ub.gu.se/publication/208367

Björklund, C., & Ahlskog-Björkman, E. (2018). From activity to transdisciplinarity and back again – preschool teachers' reasoning about pedagogical goals. *International Journal of Early Years Education*, *26*(1), 90–103. https://doi.org/10.1080/09669760.2017.1421524

Björklund, C., Magnusson, M., & Palmér, H. (2018). Teachers' involvement in children's mathematizing – beyond dichotomization between play and teaching. *European Early Childhood Education Research Journal*, *26*(4), 469–480. https://doi.org/10.1080/1350293X.2018.1487162

Björklund, C., & Palmér, H. (2018). *Matematikundervisning i förskolan*. https://www.nok.se/titlar/akademisk-pedagogik/matematikundervisning-i-forskolan/

Brenneman, K., Lange, A., & Nayfeld, I. (2019). Integrating STEM into Preschool Education; Designing a Professional Development Model in Diverse Settings. *Early Childhood Education Journal*, *47*(1), 15–28. https://doi.org/10.1007/s10643-018-0912-z

Bybee, R. W., & Fuchs, B. (2006). Preparing the 21st century workforce: A new reform in science and technology education. *Journal of Research in Science Teaching*, *43*(4), 349–352. https://doi.org/10.1002/tea.20147

Campbell, C., Speldewinde, C., Howitt, C., & MacDonald, A. (2018). STEM Practice in the Early Years. *Creative Education*, *9*(1), 11–25. https://doi.org/10.4236/ce.2018.91002

Cohrssen, C., & Page, J. (2016). Articulating a Rights-based Argument for Mathematics Teaching and Learning in Early Childhood Education. *Australasian Journal of Early Childhood*, *41*(3), 104–108. https://doi.org/10.1177/183693911604100313

Cross, C. T., Woods, T. A., & Schweingruber, H. (2009). Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity. In *National Academies Press*. National Academies Press.

Dejarnette, N. (2012). America's Children: Providing early exposure to STEM (Science, Technology, Engineering, & Math) Initiatives. *Education*, *133*, 77–84.

DeJarnette, N. K. (2018). Implementing STEAM in the Early Childhood Classroom. *European Journal of STEM Education*, *3*(3). https://doi.org/10.20897/ejsteme/3878

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Eskelinen, M., & Hjelt, H. (2017, September 27). *Varhaiskasvatuksen henkilöstö ja lapsen tuen toteuttaminen. Valtakunnallinen selvitys 2017* [Sarjajulkaisu]. Opetus- ja kulttuuriministeriö. https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/handle/10024/80737

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What Makes Professional Development Effective? Results From a National Sample of Teachers. *American Educational Research Journal*, *38*(4), 915–945. https://doi.org/10.3102/00028312038004915

Guskey, T. R. (2002). Professional Development and Teacher Change. *Teachers and Teaching*, *8*(3), 381–391. https://doi.org/10.1080/135406002100000512

Hedlin, M., & Gunnarsson, G. (2014). Preschool student teachers, technology, and gender: Positive expectations despite mixed experiences from their own school days. *Early Child Development and Care*, *184*(12), 1948–1959. https://doi.org/10.1080/03004430.2014.896352

Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., & Wernberg, A. (2020). *Matematikdidaktik i förskolan, 2 uppl*. https://www.gleerups.se/universitet-och-hogskola/universitet-och-hogskola-lararutbildning-pedagogik/lararutbildning-och-pedagogik-forskola/matematikdidaktik-i-forskolan-2-uppl-p51102825

Hobbs, L., Clark, J. C., & Plant, B. (2018). Successful Students – STEM Program: Teacher Learning Through a Multifaceted Vision for STEM Education. In R. Jorgensen & K. Larkin (Eds.), *STEM Education in the Junior Secondary: The State of Play* (pp. 133–168). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5448-8_8

Hunter-Doniger, T. (2021). Early Childhood STEAM Education: The Joy of Creativity, Autonomy, and Play. *Art Education*, *74*(4), 22–27. https://doi.org/10.1080/00043125.2021.1905419

Jamil, F. M., Linder, S. M., & Stegelin, D. A. (2018). Early Childhood Teacher Beliefs About STEAM Education After a Professional Development Conference. *Early Childhood Education Journal*, *46*(4), 409–417. https://doi.org/10.1007/s10643-017-0875-5

Kajetski, T., Salminen, M., & Kauppi, L. (2018). *Uusi Matikasta moneksi*. https://lkkp.kauppakv.fi/sivu/tuote/uusi-matikasta-moneksi/2167881

Karila, K. (2016). *Vaikuttava varhaiskasvatus—Varhaiskasvatuksen tilannekatsaus*. https://researchportal.tuni.fi/en/publications/vaikuttava-varhaiskasvatus-varhaiskasvatuksen-tilannekatsaus

Karila, K., Kosonen, T., & Järvenkallas, S. (2017, June 29). *Varhaiskasvatuksen kehittämisen tiekartta vuosille 2017–2030: Suuntaviivat varhaiskasvatukseen osallistumisasteen nostamiseen sekä päiväkotien henkilöstön osaamisen, henkilöstörakenteen ja koulutuksen kehittämiseen* [Sarjajulkaisu]. Opetus- ja kulttuuriministeriö. https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/handle/10024/80221

Karila, K., & Nummenmaa, A. R. (2001). *Matkalla moniammatillisuuteen. Kuvauskohteena päiväkoti*. https://researchportal.tuni.fi/fi/publications/matkalla-moniammatillisuuteen-kuvauskohteena-p%C3%A4iv%C3%A4koti

Komara, C., & Herron, J. (2012). Implementing Formative Mathematics Assessments in Prekindergarten. *Childhood Education*, *88*(3), 162–168. https://doi.org/10.1080/00094056.2012.682548

Kurtén, B., & Henriksson, A.-C. (2021). A model for continued professional development with focus on inquiry-based learning in science education. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 208–234. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1448

MacDonald, A., Huser, C., Sikder, S., & Danaia, L. (2020). Effective Early Childhood STEM Education: Findings from the Little Scientists Evaluation. *Early Childhood Education Journal*, *48*(3), 353–363. https://doi.org/10.1007/s10643-019-01004-9

Magnusson, L. O., & Bäckman, K. (2021). What is the capacity of A in the contexts of STEM? *Early Years*, *0*(0), 1–14. https://doi.org/10.1080/09575146.2021.1914557

Marton, F., Tsui, A., Chik, P., Ko, P., & Lo, M. (2004). *Classroom Discourse and the Space of Learning*.

Maskit, D., & Firstater, E. (2016). Preschool Teachers' Perspectives on Teaching as a Profession and Pedagogical Change. *Journal of Research in Childhood Education*, *30*(2), 200–210. https://doi.org/10.1080/02568543.2016.1143417

McCray, J. S., & Chen, J.-Q. (2012). Pedagogical Content Knowledge for Preschool Mathematics: Construct Validity of a New Teacher Interview. *Journal of Research in Childhood Education*, *26*(3), 291–307. https://doi.org/10.1080/02568543.2012.685123

Neuman, G. (2021). *Inlägg i diskussionsforumet De nationella styrdokumenten* (Opublicerat manuskript). LUMATIKKA 2 – Matematik inom småbarnspedagogik och förskola – med barnet i centrum!

Olsson, H., & Sörensen, S. (2021). *Forskningsprocessen Kvalitativa och kvantitativa perspektiv*. https://www.liber.se/produkt/forskningsprocessen-25312

Oppermann, E., Anders, Y., & Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, *58*, 174–184. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004

Postholm, M. B. (2012). Teachers' professional development: A theoretical review. *Educational Research*, *54*(4), 405–429. https://doi.org/10.1080/00131881.2012.734725

Pramling, N., & Pramling Samuelsson, I. (2011). *Educational Encounters: Nordic Studies in Early Childhood Didactics: Vol. 4)*. https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-1617-9

Pramling, N., & Wallerstedt, C. (2019). *Lekresponsiv undervisning – ett undervisningsbegrepp och en didaktik för förskolan*. 16.

Pramling, N., Wallerstedt, C., Lagerlöf, P., Björklund, C., Kultti, A., Palmér, H., Magnusson, M., Thulin, S., Jonsson, A., & Pramling Samuelsson, I. (2019). *Play-Responsive Teaching in Early Childhood Education: Vol. CHILD, volume 26)*. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-15958-0

Ralston, P. A. S., Hieb, J. L., & Rivoli, G. (2013). Partnerships and Experience in Building STEM Pipelines. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*, *139*(2), 156–162. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EI.1943-5541.0000138

Repo, L., Hjelt, H., Paananen, M., Eskelinen, M., Mattila, V., Lerkkanen, M.-K., Gammelgård, L., Ulvinen, J., Marjanen, J., & Kivistö, A. (2019). *Varhaiskasvatuksen laatu arjessa: Varhaiskasvatussuunnitelmien toteutuminen päiväkodeissa ja perhepäivähoidossa*. https://researchportal.tuni.fi/en/publications/varhaiskasvatuksen-laatu-arjessa-varhaiskasvatussuunnitelmien-tot

Repo, L., Paananen, M., Eskelinen, M., Mattila, V., Lerkkanen, M.-K., Gammelgård, L., Ulvinen, J., Marjanen, J., Kivistö, A., & Hjelt, H. (n.d.). *Varhaiskasvatuksen laatu arjessa*. 166.

Rudd, L. C., Lambert, M. C., Satterwhite, M., & Smith, C. H. (2009). Professional Development + Coaching = Enhanced Teaching: Increasing Usage of Math Mediated Language in Preschool Classrooms. *Early Childhood Education Journal*, *37*(1), 63–69. https://doi.org/10.1007/s10643-009-0320-5

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching:Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Utbildningsstyrelsen. (2014). *Grunderna för förskoleundervisningens läroplan 2014*. Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-forskoleundervisningens-laroplan

Utbildningsstyrelsen. (2018). *Grunderna för planen för småbarnspedagogik 2018*. Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sv/statistik-och-publikationer/publikationer/grunderna-planen-smabarnspedagogik-2018

Utbildningsstyrelsen. (2021). *Grunderna för läroplanen för försöket med tvåårig förskoleundervisning har publicerats*. Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sv/nyheter/2021/grunderna-laroplanen-forsoket-med-tvaarig-forskoleundervisning-har-publicerats

Utbildningsstyrelsen. (2022). *Grunderna för planen för småbarnspedagogik 2022*. Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-planen-smabarnspedagogik

Vartiainen, J. (2021). Play Is a Pathway to Science: STEAM education in early childhood. *Childhood Education*, *97*(5), 56–59. https://doi.org/10.1080/00094056.2021.1982295

Vartiainen, J., & Kumpulainen, K. (2020). Playing with science: Manifestation of scientific play in early science inquiry. *European Early Childhood Education Research Journal*, *28*(4), 490–503. https://doi.org/10.1080/1350293X.2020.1783924

Kielentämisen näkökulmia kuudennen luokan oppilaiden matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuihin

Marja-Kaisa Kortesalmi[1], Päivi Perkkilä[2] ja Jorma Joutsenlahti[3]

[1] Oulaisten kaupunki

[2] Kasvatustieteellinen tiedekunta, Jyväskylän yliopisto

[3] Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Tampereen yliopisto

Tiivistelmä: Artikkelissa tarkastellaan kuudennen luokan lopussa oppilaiden tuottamia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Tutkimuksen toteutti matemaattiseen ajatteluun ja sen kielentämiseen perehtynyt opettaja. Tutkimukseen osallistui 35 kuudennen luokan oppilasta. Tutkimusaineistona olivat oppilaiden kirjalliset ratkaisut kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Oppilaat kuvasivat kielentämisen keinoin omaa matemaattista ajatteluaan sekä tehtävien tuottamisessa että ratkaisuprossien avaamisessa. Tuloksista on nähtävissä, että oppilailla oli taitoja kielentää monipuolisesti matemaattista ajatteluaan. Matematiikan opetuksessa olisikin hyvä ohjata oppilaita ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan monipuolisesti ja täsmällisesti kielentämisen keinoin.

Asiasanat: matemaattinen ajattelu, kielentäminen, sanalliset ongelmanratkaisutehtävät

Yhteystiedot: marja-kaisa.kortesalmi@oulainen.fi

1 Johdanto

Vuosina 2018–2022 toteutetussa LUMATIKKA-ohjemassa (ks. tarkemmin tämän teemanumeron pääkirjoitus) on järjestetty valtakunnallista matematiikan opetuksen täydennyskoulusta varhaiskasvatuksen, esiopetuksen, perusopetuksen ja toisen asteen opettajille. Alaluokkien opettajille suunnatuissa koulutusosioissa on perehdytty muun muassa alaluokkien matematiikan keskeisten käsitteiden opettamiseen, eriyttämisen keinoihin, matematiikan opetuksen konkretisointiin sekä matemaattisen ajattelun kielentämiseen. Tässä artikkelissa tarkastellaan erityisesti matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitystä alaluokkien matematiikan opetuksessa. Luokanopettaja Marja-Kaisa Kortesalmi on osallistunut matemaattisen ajattelun kielentämisen koulutuksiin ja painottanut kielentämistä omassa matematiikan opetuksessaan. Hän on toteuttanut tässä artikkelissa esiteltävän tutkimusintervention kielentämisen merkityksestä.

Tutkimuksissa (mm. Perkkilä ym., 2018; Joutsenlahti ym., 2017; Perkkilä, 2002) on tuotu esille, että Suomessa matematiikan opetusta oppitunneilla ohjaavat suurelta osin enemmän matematiikan oppikirjat ja opettajan oppaat kuin matemaattiset sisällöt ja opetussuunnitelma. Edellä mainitusta voidaan käyttää nimitystä perinteinen matematiikan opetus, joka perustuu oppikirjasidonnaiseen opetustapaan. Oppikirjasidonnaiseen tapaan toteuttaa opetusta liittyy luottamus siihen, että oppikirjat noudattavat kulloinkin voimassa olevaa opetussuunnitelmaa. (vrt. Perkkilä ym., 2018; Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Perkkilä, 2002). Näin siis hyvin usein oppikirja on keskeisemmässä roolissa kuin opetussuunnitelma opetuksen suunnittelussa – varsinkin Suomessa oppikirja vaikuttaa erittäin voimakkaasti opetuksen aiheiden sisältöön ja järjestykseen. Oppikirjaan perustuvassa opetuksessa lähes kaikki opettajien esittämät esimerkit ja harjoitukset perustuvat käytössä olevaan matematiikan oppikirjaan, ja opetus on opettajajohtoista. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilaat työskentelevät matematiikan oppikirjan sisältöjen mukaisesti sekä oppituntien aikana että kotona kotitehtäviä tehdessään. Oppilaalle voi muodostua hyvinkin kapea kuva matematiikasta laskemisena ja tehtäväkirjan täyttämisenä. (Lepik ym., 2015; Viholainen ym., 2015.)

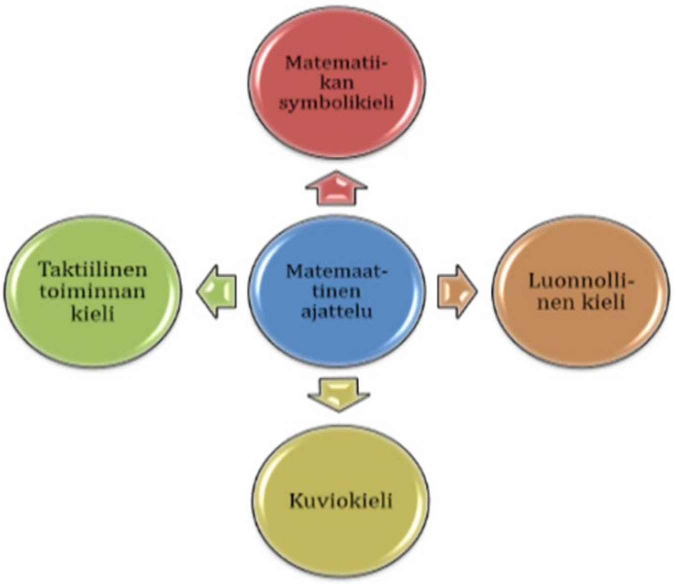
Perusopetuksen opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2014) kuitenkin ohjeistaa, että opetuksen tulisi lähteä oppilaille tutuista, kiinnostavista aiheista ja ongelmista. Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua, joka luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle. Samalla opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia.

Edellä mainittu liittyy kielentämisen pedagogiikkaan, missä painotetaan matemaattisen ajattelun monipuolista ilmaisua taktiilisen toiminnan kielen, puhutun kielen (luonnollisen kielen), kuviokielen (kuvia tulkiten tai piirtäen kuvia) sekä matematiikan symbolikielen avulla. Tähän haasteeseen ei pystytä vastaamaan yksistään oppikirjaan sitoutuvalla opetuksella. Opettaja on asiantuntija, jolla tulee olla opetustyön suunnittelun pohjana sisältötietoa sekä pedagogista että opetussuunnitelmallista tietoa (Shulman, 1986). Kun opettajalla on teoreettinen perusta opetuksensa suunnittelun tukena, hänen on mahdollista perustella opetukseen liittyviä valintojaan niin oppilaille, kollegoilleen kuin vanhemmille. Kielentämisen pedagogiikan käyttäminen matematiikan opetuksessa tarjoaa opettajalle monipuolisia keinoja matemaattisen ajattelun kehittämiseen oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä. Näin onkin mielenkiintoista tarkastella tässä artikkelissa oppilaiden tuottamia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään.

2 Matematiikan kielentämisestä

Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) sanoin matematiikan opetuksen tärkeä tehtävä on auttaa oppijaa paitsi rakentamaan ja sisäistämään matematiikan sisällöistä tietorakenne niin, että kaikilla yksityiskohdilla on selkeä merkitys, niin myös soveltamaan tietoa ymmärryksen mukaisesti uusiin tilanteisiin eikä vain toistaa muistinvaraisesti. Tässä kaikessa oppijaa auttaa matematiikan kielentäminen, joka tarkoittaa matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla. Kieli jäsentää ja kehittää opiskelijan ajattelua, ja toisaalta uudet ajatukset mahdollistavat käsitteiden ja prosessien monipuolisemman kielellisen kuvaamisen ja sen syvällisemmän ymmärtämisen. Tällainen opiskelu vaatii matematiikan symbolikielen rinnalla luonnollisen kielen ja kuviokielen joustavaa ja tarkoituksenmukaista käyttöä matemaattisen ajattelun ilmaisussa. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018.)

Opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) on luokille 1–6 kirjattu tavoitteeksi ”kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen”. Joutsenlahti ja Rättyä (2015) havainnollistavat matematiikan opiskelussa käytettäviä kieliä kuvion 1 mukaisesti.



Kuvio 1. Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen neljän kielen avulla: luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli (Joutsenlahden & Rättyä, 2015)

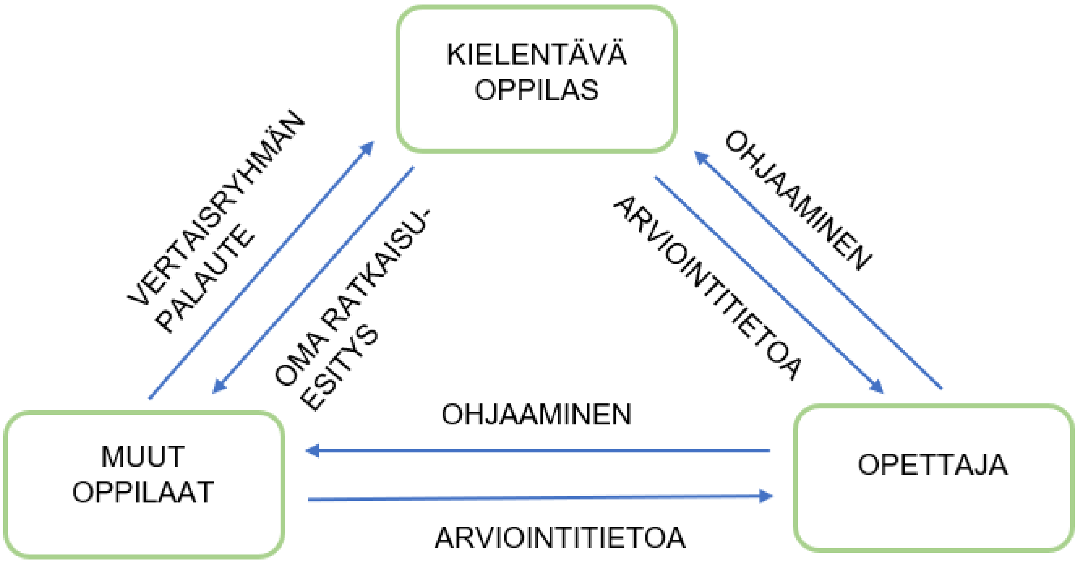
Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan matematiikan kielentämiseen kuuluvat luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli, joka on erityisesti alakoulussa keskeinen matemaattisen ajattelun ilmaisun kieli. Kielentämisen periaatteet ovat löydettävissä myös *Varga-Neményi-menetelmän* periaatteista. Periaatteiden mukaan oppilasta kannustetaan tuomaan esille ajatteluaan monipuolisesti kaikilla kuvion 1 neljän kielen mallin tavoilla, joista tyypillisimpiä eli suullista ja kirjallista kielentämistä suhteessa muihin matemaattisen ajattelun ilmaisemisen kieliin kuvataan vielä tarkemmin seuraavaksi.

2.1 Suullisesta kielentämisestä

Luonnollisen kielen käyttö on matematiikan tunneilla pääosassa, kun ryhmässä käydään keskustelua opetettavasta asiasta, tehtävien ratkaisemisesta tai opeteltavien käsitteiden merkityksien rakentumisesta. Kun oppilas kertoo oman ratkaisunsa esimerkiksi laskemastaan matematiikan tehtävästä, hänen on ensin jäsenneltävä ajatuksensa itselleen, ennen kuin hän voi sanallistaa sitä muille. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan oman ajattelun jäsentäminen tukee matemaattisten käsitteiden syvällisempää ymmärtämistä.

Matematiikan tunneilla suullinen kielentäminen voi olla opettajajohtoista, pienryhmäkeskustelua tai parikeskustelua Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan. Keskustelussa mukana oleminen ja sen kuunteleminen antaa opettajalle mahdollisuuksia havainnoida oppilaille virheellisesti muodostuneita matemaattisia käsityksiä ja huomioida ne opetuksessa. Lisäksi oppilaiden puhe helpottaa opettajaa myös arvioinnissa. Arvioinnin tekeminen on luotettavampaa, kun oppilas käyttää luonnollista kieltä symbolikielen lisäksi. Tällöin matemaattisten käsitteiden käyttö on osa oppilaan käyttämää puhetta, jonka kautta opettaja saa syvällisempää tietoa oppilaan matemaattisesta ymmärryksestä. (Joutsenlahti & Kulju, 2015).

Yksi varteen otettava seikka suullisessa kielentämisessä on myös se, että kuuntelemalla luokkakaveriaan oppilas voi samalla peilata omia käsityksiään kuultuun ja tehdä vertailuja käsityksien välillä. Näin oppilaan omat käsitykset saattavat vahvistua tai päinvastoin keskustelu saattaa johtaa kahden vastakkaisen käsityksen väliseen pohdiskeluun yhdessä koko opetusryhmän kanssa. Kuvio 2 havainnollistaa sitä, kuinka matematiikan kielentäminen näkyy opetustilanteissa opiskelija, opettajan ja muun ryhmän näkökulmasta.



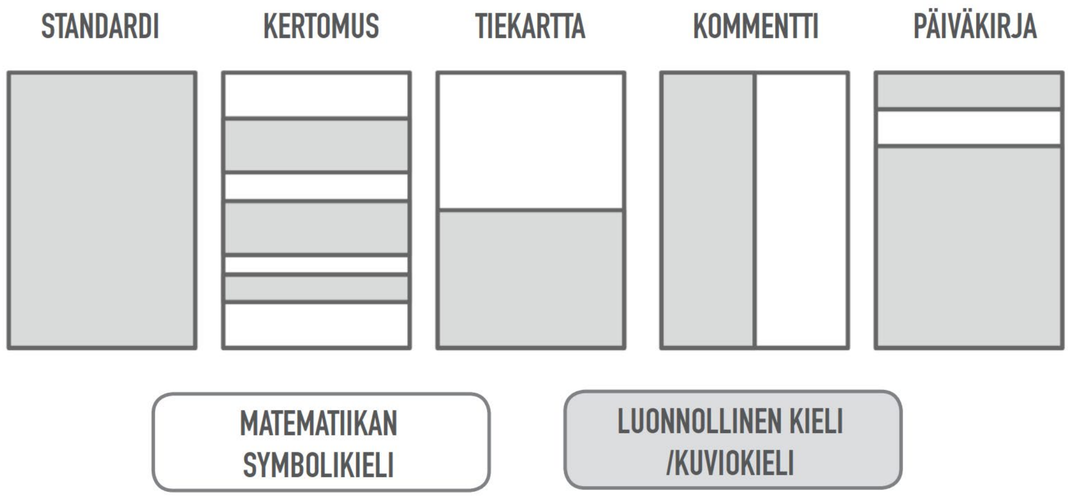
Kuvio 2. Matematiikan kielentäminen oppilaan, opettajan ja muun ryhmän näkökulmista Joutsenlahtea (2003) mukaillen.

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) tuovat esille mielenkiintoisen näkökulman matemaattisen ajattelun kielentämiseen variaatioteorian pohjalta. Variaatioteorian lähtökohtana on se, että havaitsemme ilmiöiden merkittävistä puolista yleensä vain osan ja havaintomme ilmiöstä ovat ylipäätään subjektiivisia ja usein tulkinnanvaraisia. Kun luokassa käydään keskustelua matemaattisista ongelmista, näkökulmia tulee esille aina useampia. Matematiikan kielentämisessä on kysymys juuri näiden erilaisten havaintojen ja tulkintojen jakamisesta muiden oppijoiden kanssa kuin myös oppijan itsensä kanssa. Tässä ajattelu tulkitaan oppilaan sisäiseksi vuoropuheluksi, jolloin oppilas jakaa havaintoja myös itsensä kanssa. On hyvä huomata, miten opettajan tuella oppilaan omien ajatusten esittämiselle on merkitystä myös muiden oppilaiden kannalta. Oppilaita kannattaa ohjata siten, että heidän esittämistään ajatteluprosesseista on hyötyä myös vertaisoppijoille. Opettajan ohjaava rooli rohkaisee oppilaita tuomaansa ajattelunsa näkyväksi puhuen, kirjoittaen, taktiilisesti ja piirroksin. Opettaja on kuulija, joka tukee oppilaiden ajatteluprosesseja ja tarvittaessa ohjaa oppilasta tämän lähikehityksen vyöhykkeellä tuomaan monipuolisesti esille matemaattista ajatteluaan.

2.2 Kirjallisesta kielentämisestä

Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) viittaavat artikkelissaan Morganiin (2001), jonka mukaan monipuolinen kirjoittaminen matematiikan tehtävien ratkaisemisen aikana edistää matematiikan oppimista, kehittää sen ymmärtämistä, parantaa oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan ja helpottaa opettajan arviointityötä. Kirjoittaminen jäsentää oppilaan ajatuksia niin hänelle itselleen kuin myös muille oppilaille.

Joutsenlahti (2009) on esittänyt viisi kirjallisen kielentämisen mallia, joita voi soveltaa matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämisessä. Mallit ovat standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamallit (ks. kuvio 3).



Kuvio 3. Kirjallisen kielentämisen ratkaisumallit: standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamalli (Joutsenlahti, 2018)

Standardimallin käyttö perustuu symbolikieleen. Kertomusmallissa matemaattisen ongelman ratkaisemiseen käytetään symbolikielen lisäksi sanallista ja/tai kuviokieltä selventämään sekä itselle että toisille, miten ratkaisu on tehty. Kun oppilas aloittaa ongelman ratkaisun kirjallisesti tai käyttämällä kuviota, puhutaan tiekarttamallin käytöstä matematiikan kirjallisessa kielentämisessä. Tällöin symbolikieli tulee vasta vastauksen päätteeksi. Jos matematiikan symboli- ja luonnollinen kieli kulkevat ongelman ratkaisussa rinnakkain, ja luonnollisella kielellä selitetään symbolikielen käyttöä, puhutaan kommenttimallista. Päiväkirjamallissa oppilas selittää symbolikieltä sanallisesti tai kuviota käyttäen, jos hän kohtaa ongelmia ratkaistessa tehtävää.

Kirjallisen matemaattisen ongelmanratkaisun jälkeen on tärkeää, että oppilas palaa vielä tehtävässä asetettuun kysymykseen. Lukiessaan kysymyksen uudestaan oppilaan on helpompi antaa vastaus oikeassa yksikössä (esimerkiksi metreinä tai euroina) ja samalla arvioida vastauksen oikeellisuutta. Leppäaho (2018, s. 373) viittaa Pólyaan (1948), joka on esittänyt nelivaiheisen matemaattisen ongelmanratkaisumallin. Ensimmäiseksi ongelma tulee ymmärtää, minkä jälkeen täytyy tehdä suunnitelma sen ratkaisemiseksi. Kolmannessa vaiheessa suunnitelma tulee toteuttaa ja viimeiseksi täytyy vielä luoda katsaus toteutettuun ratkaisuprosessiin ja arvioida ratkaisun oikeellisuutta. Kirjallinen kielentäminen tarjoaa tähän oivan työkalun ja antaa opettajalle mahdollisuuden arvioida oppilaan matemaattista ajattelua. Tässä kokeilussa keskitytään edellä esitetystä neljän kielen mallista luonnolliseen kieleen ja matematiikan symbolikieleen sekä piirroksiin kuviokielellä.

3 Tutkimustehtävä

Tämän artikkelin tarkoituksena on tarkastella kuudennen luokan oppilaiden (n=35) tuottamia kirjallisia ratkaisuja kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Tutkimuksessa haetaan vastauksia kysymykseen:

> *Millaisia kielentämisen tapoja oppilaat käyttävät kuvatessaan kirjallisesti kahden sanallisen ongelmaratkaisutehtävän ratkaisuja?*

3.1 Tutkimuksen osallistujat ja tutkimusaineiston keruu

Tutkimukseen osallistui kaksi kuudetta luokkaa (n=35) eräästä länsisuomalaisesta koulusta. Tutkimusaineistona olivat oppilaiden kirjalliset ratkaisut kahteen sanalliseen ongelmanratkaisutehtävään. Oppilaille esitetyt tehtävät oli valittu Jorma Joutsenlahden harjoitusmonisteesta *Omin sanoin matematiikan maailmassa* vuodelta 2016. Joutsenlahden tehtävät ovat kaikki ongelmanratkaisutehtäviä, joissa oppilaan tulee käyttää kielentämistä (muun muassa sanallisia selityksiä) tehtävien ratkaisuissa. Tutkimustehtävinä oppilaille esitettiin edellä mainitusta harjoitusmonisteesta tehtävät 7 ja 10 (ks. kuva 1).

7 a) Laadi oheisesta kuvasta kanamunien lukumäärään liittyvä tehtävä, jonka ratkaisussa voit käyttää kertolaskuja.

b) Laadi oheisesta kuvasta kanamunien lukumäärään liittyvä tehtävä, jonka ratkaisussa voit käyttää jakolaskuja (ositus- tai sisältöjako).

c) Kirjoita kaverille molemmista laskuista, miten ratkaisit ne. Kerro vielä eri vaiheet, miten päädyit vastaukseen.

10. a) Ratkaise tehtävä.

b) Kirjoita kaverille, miten ratkaisit tehtävän. Kerro eri vaiheet, miten päädyit vastaukseen. Voit myös piirtää tarvittaessa.

Tehtävä: Luokasta lähtee pois puolet oppilaista. Vähän ajan päästä jäljelle jääneistä oppilaista poistuu kolmasosa. Luokkaan jää edelleen 8 oppilasta. Kuinka monta heitä alun perin oli?

Kuva 1. Sanalliset ongelmanratkaisutehtävät 7 ja 10 (Joutsenlahti, 2016a)

Tehtävä 7 on luonteeltaan avoin ongelmanratkaisutehtävä. Mainitussa tehtävässä on kuva (ks. kuva 3), jossa kanamunakennot ovat hyvässä järjestyksessä viidellä päällekkäin olevalla hyllyllä. Oppilaille annettiin vain alkuasetelma, jonka pohjalta oppilaiden tuli laatia tehtävänsä. Oppilaiden tuli laatia tehtävien ohjeistuksen mukaisesti annetusta kuvasta sanallisia tehtäviä (tehtävät 7a ja 7b) ja kuvata omaa matemaattista ajatteluaan tehtävien ratkaisuissa (tehtävä 7c) (ks. kuva 1).

Tehtävässä 10 (ks. kuva 3) oppilaiden tuli ratkaista seuraava tehtävä: ”Luokasta lähtee pois puolet oppilaista. Vähän ajan päästä jäljelle jääneistä oppilaista poistuu kolmasosa. Luokkaan jää edelleen 8 oppilasta. Kuinka monta heitä alun perin oli?” Samoin kuin tehtävän 7 kohdassa c ja tehtävän 10 kohdassa b pyydettiin oppilaita kirjoittamaan kaverille, kuinka he olivat itselaatimansa tehtävän ratkaisseet. Myös ratkaisujen eri vaiheet tuli selittää. Tämän tehtävän 10b ratkaisuprosessin kuvauksessa oppilaita kehotettiin käyttämään tarvittaessa myös piirtämistä. Näin oppilaiden tuli molemmissa tehtävissä tehdä matemaattinen ajattelu näkyväksi kielentämisen keinoin. Ratkaisut osoittautuivat varsin mielenkiintoisiksi kielentämisen näkökulmasta.

Sekä tehtävät 7a ja 7b että tehtävien 7c ja 10 b ratkaisuprosessien kuvaukset ovat luonteeltaan avoimia ongelmanratkaisuprosesseja. Jokaisen oppilaan tuli luoda itsenäisesti, ilman valmista mallia, oman näköisensä tehtävä (tehtävät 7a ja 7b) sekä kuvaus tehtävien ratkaisuprosesseista joko piirtäen, kirjoittamalla ja symbolista kieltä käyttämällä tai käyttämällä vain joitakin edellä mainituista kielistä. Näissä tehtävissä oppilaat harjoittelivat niin ongelmanratkaisun kuin kielentämisenkin taitoja.

Tämänkaltaisia tehtäviä ei oppilailla juurikaan oppimateriaaleissa ole. Ahtee tutkimusryhmineen (2015) painottaa luovuutta ongelmanratkaisun keskeisenä tekijänä, ja tämä luovuuden näkökulma toteutuukin tehtävien 7 ja 10 lähtökohdissa. Ongelmanratkaisu voidaan nähdä matematiikan opetuksen ytimenä ja oppilaille tulisi tarjota juuri ongelmanratkaisun keinoin kehittää keksimiskykyään ja luovaa ajatteluaan. Matematiikan opetusta voidaan tehostaa avoimien tehtävien käytöllä, ja juuri ne tarjoavat oppilaalle mahdollisuuden käyttää luovuuttaan. Avoimissa tehtävissä on useimmiten erilaisia ratkaisuja ja ratkaisumahdollisuuksia, jotka ovat riippuvaisia oppilaan tekemistä valinnoista. Esimerkiksi tehtävien 7 ja 10 ratkaisuprosessien kuvauksissa oppilaat joutuivat tekemään valintoja siitä, millä tavoin kuvaavat tehtävien ratkaisuprosesseja. Kielentämisen pedagogiikka tukee hyvin ongelmanratkaisun luovuutta ja antaa oppilaille keinoja ratkaisuprosessien kuvaamiseen.

3.2 Tutkimusaineiston analyysi

Tehtävien ratkaisut analysoitiin teoriapohjaisen sisällönanalyysin (Tuomi & Sarajärvi, 2018) keinoin. Tehtävien 7 ja 10 ratkaisuja luokiteltiin Joutsenlahden (2009) esittämän viiden kirjallisen kielentämisen mallin pohjalta, jolloin kirjallisen kielen ratkaisumallit toimivat tutkimuksen teoriapohjaisena luokittelurunkona. Oppilaiden tuottamista sanallisista ratkaisuista tehtävään 7 hyväksyttiin sanallisiksi tehtäväksi myös kuvasta tehty kysymys. Näitä tehtäviä voidaan nimittää minisanallisiksi tehtäviksi (Perkkilä, 1999). Perusteluna edellä mainittuun on se, että voidakseen tuottaa annettujen ehtojen mukaisen ratkaisun, oppilaan on jo kysymystä tehdessään täytynyt oivaltaa arkisen kuvan ja matematiikan välinen yhteys. Tämän yhteyden oppilas on sanallistanut tehdessään kysymystä.

Analysoitavaksi valittujen ongelmanratkaisutehtävien 7 ja 10 vastaukset analysoitiin tehtäväkohtaisesti. Luokittelussa ei huomioitu, oliko oppilas ratkaisut kyseisen tehtävän oikein vai väärin. Kaikki tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat tuottaneet ratkaisun tehtävään 7, mutta tehtävän 10 jätti ratkaisematta 11 oppilasta (31,4 %) kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista (n=35). Molempien tehtävien analysoinnissa tuloksissa olevat prosenttiluvut on laskettu siten, että käytettyä kirjallisen kielentämisen mallia on verrattu kaikkiin annettuihin vastuksiin. Huomiotta on siis jätetty niiden oppilaiden tehtäväpaperit, jotka eivät olleet lainkaan ratkaisseet kyseistä tehtävää.

4 Tutkimuksen tulokset

Analyysin tuloksista voidaan nähdä, että oppilailla on taitoja kielentää matemaattista ajatteluaan. Seuraavaksi esitetään tehtävien 7 ja 10 tulokset erikseen. Tuloksissa kuvataan oppilaiden antamien ratkaisujen jakautumista kirjallisten kielentämisen mallien kesken.

4.1 Tehtävän 7 tulokset

Taulukossa 1 on esitetty kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen sekä määrällinen jakautuminen tehtävässä 7.

Taulukko 1. Kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen jakautuminen oppilaiden ratkaisuissa tehtävässä 7

Kirjallisen kielentämisen malli	Oppilaiden ratkaisut tehtävään 7 (%)	Oppilaiden ratkaisut tehtävään 7 (n=35)
Standardimalli	25,7 %	9
Kertomusmalli	25,7 %	9
Tiekarttamalli	8,6 %	3
Kommenttimalli	37,1 %	13
Päiväkirjamalli	2,9 %	1

Kirjallisen kielentämisen standardimallia ongelmanratkaisutehtävän 7 ratkaisussa oli käyttänyt yhdeksän (25,7 %) oppilasta. Kertomusmallin mukaista ratkaisutapaa esiintyi myös yhdeksällä oppilaalla. Tiekarttamallin mukaista ratkaisutapaa oli käyttänyt vain kolme oppilasta (8,6 %). Kommenttimallin käyttö näytti luontaisimmalta tavalta, sillä edellä mainittua mallin mukaista ratkaisutapaa oli käyttänyt 13 oppilasta (37,1 %). Ainoastaan yksi oppilas oli käyttänyt päiväkirjamallia tehtävän 7 ratkaisemisessa. Näissä tuloksissa ovat mukana kaikkien oppilaiden vastaukset huolimatta siitä, oliko oppilaan antama ratkaisu tehtävään oikea vai väärä. Seuraavassa taulukossa 2 on kuvattu oppilaiden laatimien sanallisten tehtävien, oikein ratkaistujen tehtävien ja oppilaiden omien ajatteluprosessien sanallistamisen määriä prosentteina ja oppilasmäärinä.

Taulukko 2. Tehtävään 7 liittyvien sanallisten tehtävien tuottaminen, tehtävän oikeat ratkaisut, omien ajatteluprosessien sanallistamisen määrät prosentteina

Tehtävä 7	Oppilaiden ratkaisujen määrät (%)	Oppilaiden ratkaisujen määrät (n=35)
Oppilas laatinut sanallisen tehtävän	45,7 %	16
Oppilas ratkaissut tehtävän oikein	34,3 %	12
Oman ajatusprosessin kielentäminen	62,9 %	22

Kaikkiaan 16 oppilasta (45,7 %) oli laatinut sanallisen tehtävän tehtävään 7. Kananmunakennojen oikean lukumäärän oli selvittänyt 12 oppilasta, joka on 34,3 % tutkimukseen osallistuneista oppilaista (n=35). Oppilaista 22 (62,9 %) oli osannut kirjoittaa ajatusprosessinsa kirjallisesti näkyville tehtävän 7 ratkaisun kulusta.

4.2 Tehtävän 10 tulokset

Tehtävän 10 tuloksissa ovat mukana kaikki ratkaisun antaneiden oppilaiden vastaukset huolimatta siitä, oliko ratkaisu oikea vai väärä (ks. taulukko 3). Tehtävään 10 antoi vastauksen 34 oppilasta. Taulukossa 3 vastausten jakautuminen kirjallisen kielentämisen mallien mukaisesti on laskettu tehtävään vastauksen antaneiden kokonaismäärästä (n=34). S*tandardimallia* kirjallisen kielentämisen mallia oli käyttänyt viisi (14,7 %) kaikista tehtävään 10 vastanneista oppilaista. *Kertomusmallin* käyttöön oli päätynyt kuusi oppilasta (17,6 %). Tiekarttamallia käytti kahdeksan (23,5 %) oppilasta kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista. Kirjallisen kielentämisen *kommenttimallin* mukaisen vastauksen oli antanut viisi (14,7 %) oppilasta.

Taulukko 3. Kirjallisen kielentämisen mallin käytön prosentuaalinen jakautuminen tehtävässä 10

Kirjallisen kielentämisen malli	Oppilaiden ratkaisut tehtävään (%)	Oppilaiden ratkaisut tehtävään (n=34)
Standardimalli	14,7 %	5
Kertomusmalli	17,6 %	6
Tiekarttamalli	23,5 %	8
Kommenttimalli	14,7 %	5
Päiväkirjamalli	-	-

Seuraavassa taulukossa 4 on havainnollistettu prosentteina ja oppilasmäärinä oikein ratkaistujen tehtävien ja omaa ajatteluprosessia sanallistaneiden määrät tehtävään 10 vastanneiden joukosta.

Taulukko 4. Tehtävään 10 oikeiden ratkaisujen ja tehtävän ratkaisuprosessissa omaa ajatteluaan sanallistaneiden määrät prosentteina

Tehtävä 10	**Oppilaiden ratkaisujen määrät (%)**	**Oppilaiden ratkaisujen määrät** (n=35)
Oppilas ratkaissut tehtävän oikein	42,9 %	15
Omaa ajatusprosessia kielentänyt	48,6 %	17

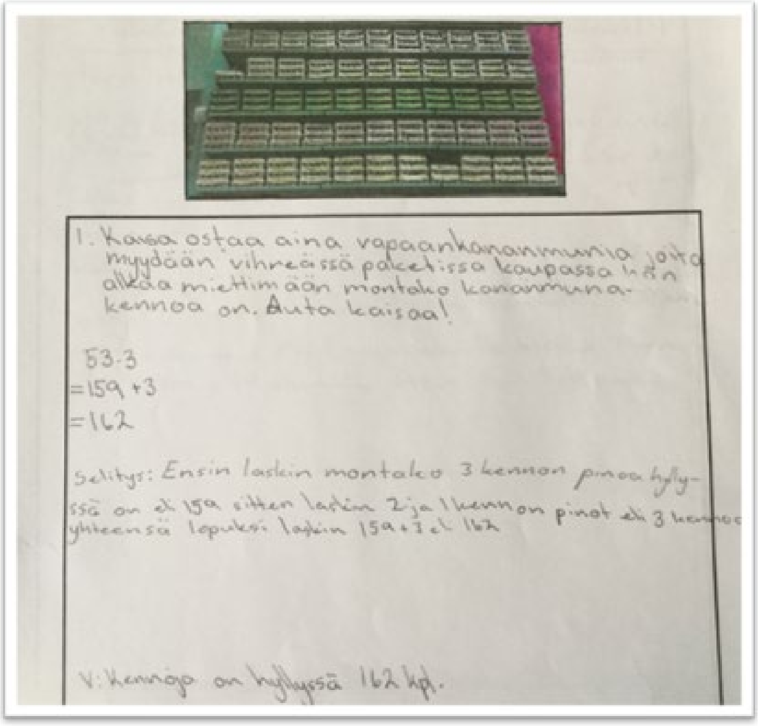
Tutkimukseen osallistuneista (n=35) 15 oppilasta oli ratkaissut tehtävän oikein, mikä on 42,9 % kaikista oppilaista. Omaa ratkaisuaan sanallisesti, kuvallisesti tai sanallisesti ja kuvallisesti oli selittänyt 17 oppilasta (48,6 %). Yksi oikean vastauksen antaneista oppilaista oli käyttänyt standardimallia ja kolme oppilasta, jotka olivat selittäneet omaa ajatteluaan, oli päätynyt väärään ratkaisuun.

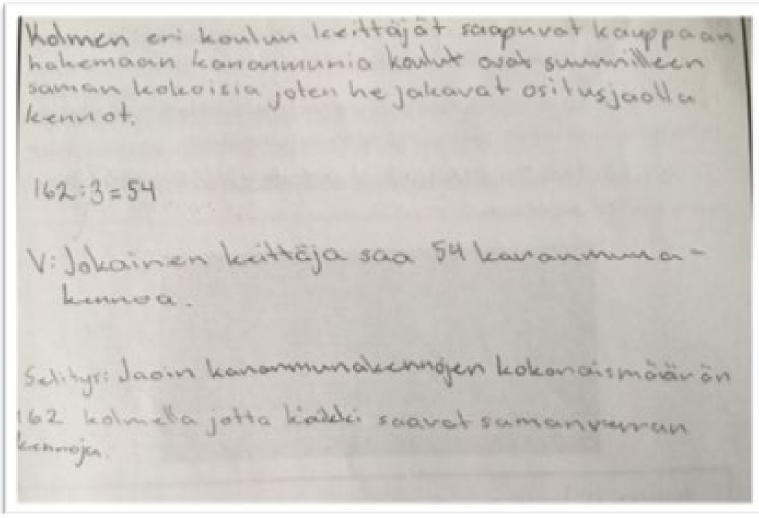
4.3 Tehtävien ratkaisujen tarkastelua

Tehtävän 7 ratkaisuissa erottui selkeimmin kommenttimallin käyttö (37,1 % tutkimukseen osallistuneista). Tehtävän 10 kohdalla kommenttimalli ei erottunut niin selkeästi, sillä vain 14,3 % tutkimukseen osallistuneista käytti kommenttimallia tehtävän 10 ratkaisussa. Tämän mallin käyttö lienee oppilaille luontaista, koska kommenttimallissa matematiikan symbolikieli ja luonnollinen kieli kulkevat ongelman ratkaisussa rinnakkain ja luonnollisella kielellä selitetään symbolikielen käyttöä (Joutsenlahti, 2009).

Tehtävässä 7 erottui standardimallin käyttö toiseksi suosituimpana tapana esittää ratkaisu (ks. taulukko 1). Standardimallin käyttö perustuu matematiikan symbolikielen käyttöön (Joutsenlahti, 2009). Niin sanotussa perinteisessä matematiikan opetuksessa matematiikan oppikirjat ovat usein rakenteeltaan esimerkkitehtävissä standardimallin mukaisia. Tästä johtunee, että oppilaiden luontainen tapa työskennellä matematiikan parissa muotoutuu pitkälti symbolikielen mukaiseksi ilmaisuksi.

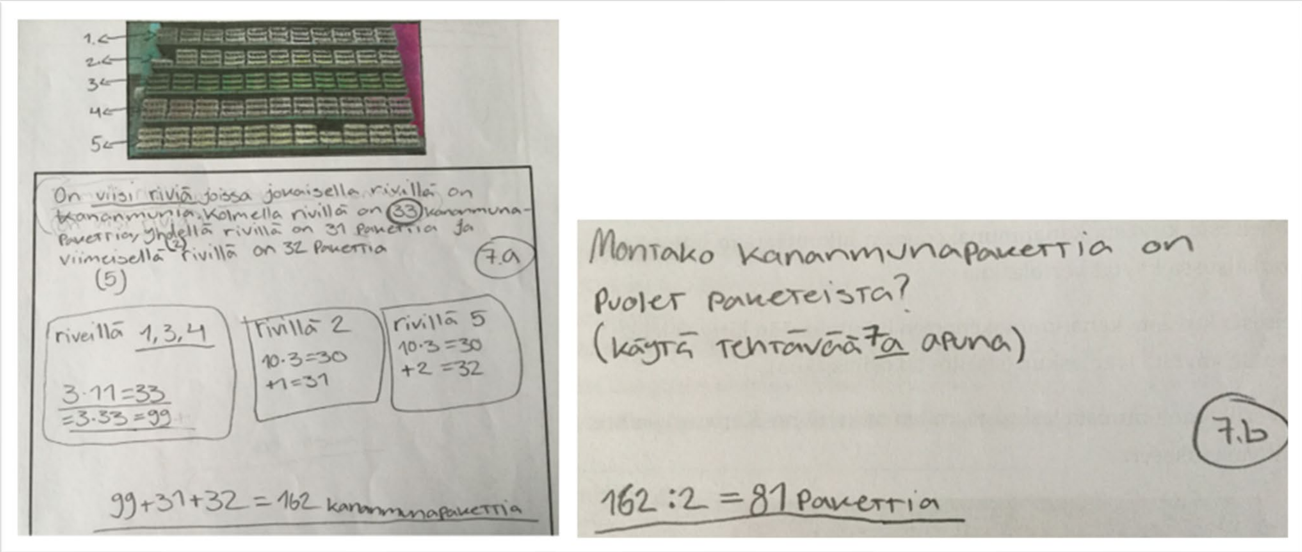
Kuvassa 2 on esitetty oppilaan (oppilas 7) esittämät kerto- ja jakolaskut sekä tehtävien ratkaisuprosessien kielentämiset.





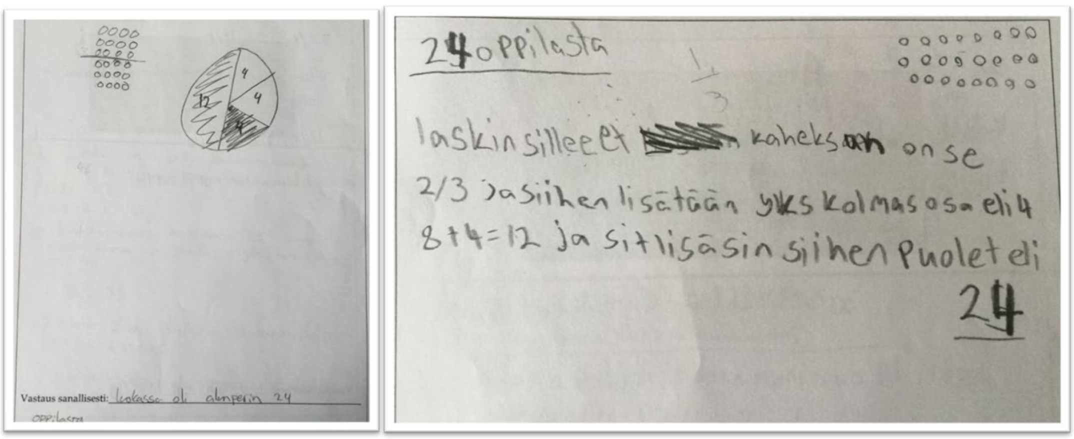
Kuva 2. Oppilaan (oppilas 7) esittämät kerto- ja jakolaskut tehtävästä 7
sekä laadittujen tehtävien ratkaisuprosessien kuvaukset

Tarkasteltaessa analyysissa mukana olleiden tehtävien vastauksia osa oppilaista oli selvästi oppinut käyttämään luonnollista kieltä tehtävien laatimisprosesseissa sekä oppinut kuvaamaan ajattelunsa etenemistä tehtävän ratkaisuprosessissa. Oppilaiden keksimissä sanallisissa tehtävissä tuli esiin myös vastauksia, joissa oppilaat rinnastavat arkipäivän tilanteita matematiikkaan. Seuraavassa kuvassa 3 on esitetty tutkimukseen osallistuneen oppilaan (oppilas 7) laatimat kerto- että jakolaskut tehtävään 7 sekä itse laadittujen tehtävien ratkaisuprosessien kuvaukset. Kuvassa 3 on esimerkki (oppilas 1) standardimallin mukaisesta ratkaisusta tehtävään 7. Kuvassa esitetty vasemmalla tehtävään 7a kertolasku ja oikealla jakolasku tehtävään 7b.



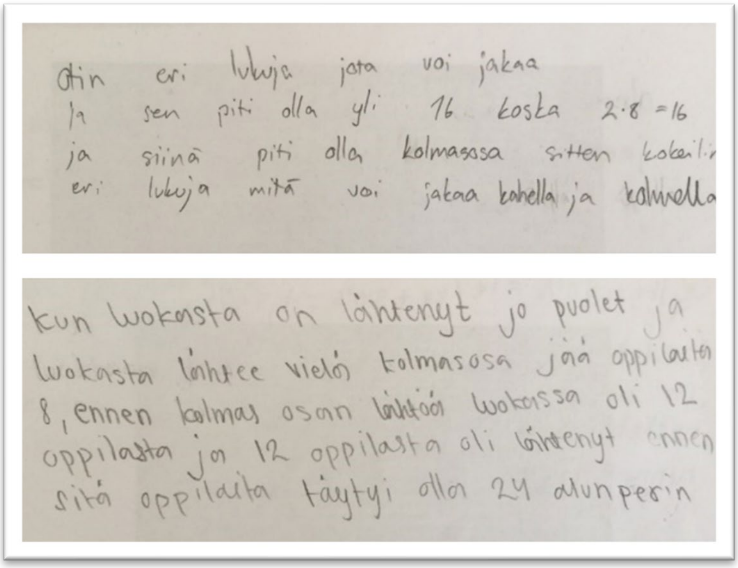
Kuva 3. Oppilaan (oppilas 1) standardimallin mukaiset ratkaisut kerto- ja jakolaskusta tehtävään 7

Tehtävässä 10 oppilaat olivat käyttäneet kuviokieltä apunaan tehdessään ratkaisua. Kuviokieltä ratkaisun tukena oli käyttänyt kaikkiaan 7 (20,0 %) tutkimukseen osallistuneista oppilaista (n=35). Oppilaiden käyttämä kuviokieli ilmeni osaksi piirrettyjen ympyröiden jonona tai vailla ilman selkeää piirrettyjen ympyröiden ryhmittelyä. Osalla oppilaista selkeä piirrettyjen ympyröiden ryhmittely ja niin sanottujen piirakkamallien käyttö näyttäytyi ilmiselvästi oman matemaattisen ajattelun esilletuomisen välineenä. Edellä mainittu saattaa johtua siitä, että oppilaita on ohjattu tuomaan matemaattista ajatteluaan esille myös kuviokielellä matematiikan oppimistilanteissa. Kuvassa 4 vasemmalla on esitetty oppilaan (oppilas 12) ratkaisu tehtävään 10 kuviokieltä käyttäen. Kuvassa 4 oikealla on tehtävän 10 ratkaisuprosessin selitys sekä kuviokielellä että sanallisesti (oppilas 14).



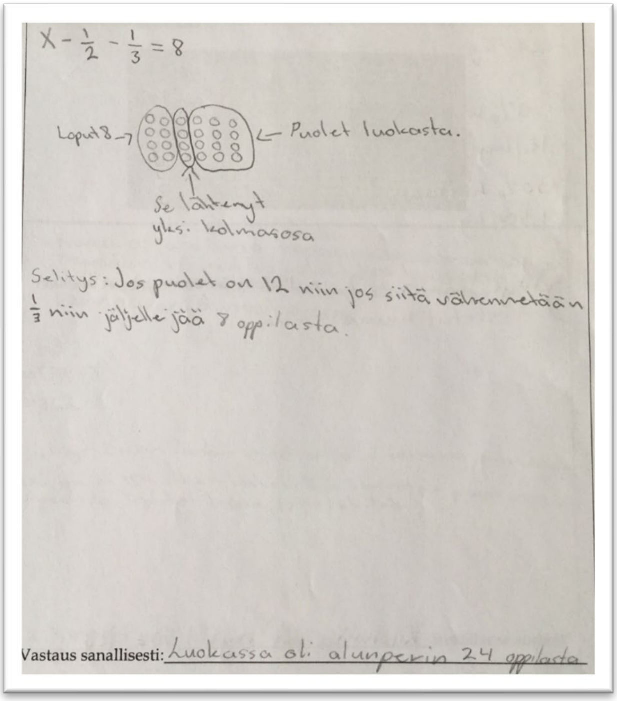
Kuva 4. Vasemmalla oppilaan esittämä ratkaisu (oppilas 12) tehtävään 10 kuviokielellä ja oikealla oppilaan (oppilas 14) ratkaisu sekä kuviokielellä että luonnollisella kielellä

Analysoiduissa tehtävissä oli mukana myös ratkaisuja, joissa oli käytetty hyväksi vain pelkkää päättelyä. Tällä tavalla ratkaistuja tehtäviä löytyi kaksi kappaletta. Eräs oppilas (oppilas 11) selitti tehtävän 10 ratkaisuaan näin (ks. kuva 5): ”Otin eri lukuja, joita voi jakaa ja sen piti olla yli 16, koska 2 • 8 = 16 ja siinä piti olla kolmasosa. Sitten kokeilin eri lukuja mitä voi jakaa kahdella ja kolmella.” Vastaukseksi hän oli kirjoittanut: ”Aluksi oli 24.” Toiselta oppilaalta (oppilas 5) löytyi tehtävään 10 seuraavanlainen ajatus (ks. kuva 5): ”Kun luokasta on lähtenyt jo puolet ja luokasta lähtee vielä kolmasosa, jää oppilaita 8. Ennen kolmasosan lähtöä luokassa oli 12 oppilasta ja 12 oppilasta oli lähtenyt ennen sitä. Oppilaita täytyi olla 24 alun perin.”



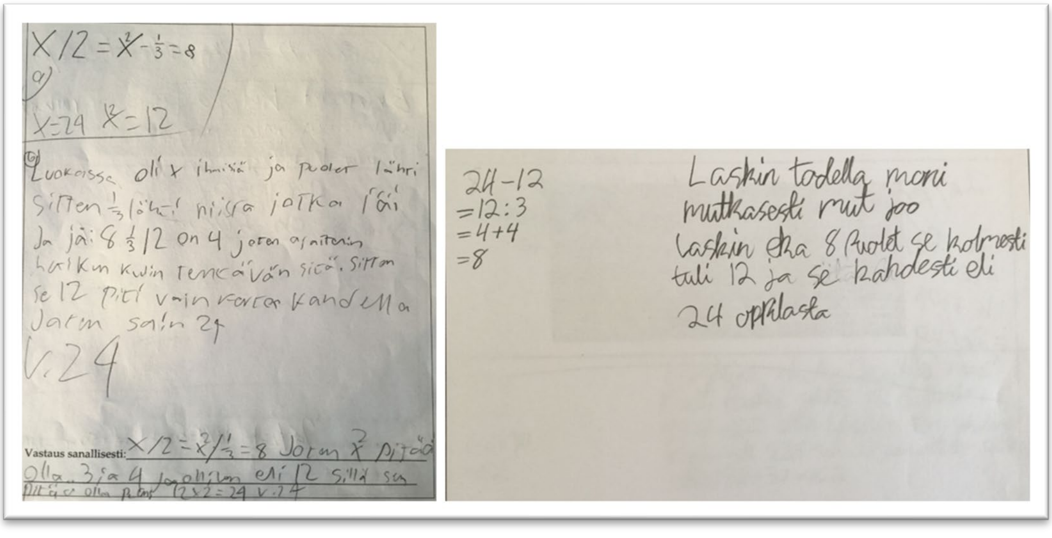
Kuva 5. Oppilaiden (oppilaan 11 ylempänä ja oppilaan 5 alempana) esittämät tehtävän 10 ratkaisut päättelyn avulla

Oppilaiden esittämissä vastauksissa oli mukana sellaisia, joissa oli perusteltu tehtävän vaativaa matemaattista ajattelua monipuolisesti kielentämisen keinoin. Seuraavassa kuvassa 6 on esitetty oppilaan (oppilas 7) tehtävän 7 ratkaisu, jossa hän oli muodostanut ratkaisemiseksi lausekkeen, kuvion ja sanallisen selityksen.



Kuva 6. Oppilaan (oppilas 7) ratkaisu tehtävään 7. Ratkaisussa esitetty lauseke, selitys sekä kuva.

Tehtävään 10 löytyi myös hieman muiden ratkaisuista poikkeavia ratkaisuja. Seuraavassa kuvassa 7 on esimerkkinä poikkeavista ratkaisuista kahden oppilaan (oppilaat 3 ja 4) ratkaisut tehtävään 10.



Kuva 7. Esimerkit (oppilaat 3 ja 4) poikkeavista ratkaisuista tehtävään 10

Joissakin oppilaiden ratkaisuissa oppilaiden tuottama matemaattisen ajattelun ilmaisu jäi melko ohueksi. Edellä mainituissa ratkaisuissa näkyi mahdollisesti niin sanottu perinteinen oppikirjan mukainen eteneminen ja oppikirjan tehtäviä painottava opetus. Erityisesti tämä tuli esille oppilaiden ajattelun ilmaisuissa matematiikan symbolikielisissä esityksissä ja standardimallin käytössä. Tehtävien ratkaisuista oli nähtävissä myös se, että ne oppilaat, joiden opetuksessa oli mahdollisesti käytetty oppimisvälineitä, ja joita oli rohkaistu ilmaisemaan ajatteluaan monipuolisesti puhuen, välinein, piirtäen ja symbolisesti, toivat ajatteluaan esille jonkin verran rohkeammin ja monipuolisemmin.

5 Pohdinta

Tässä tutkimuksessa olleiden tehtävien pohjalta esiin nousi vahvasti oppilaiden taito kielentää omaa matemaattista ymmärtämistään. Tehdyn tutkimuksen mukaan vaikuttaisi siltä, että oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmaisemista tukeva opetus rikastaa matemaattisen ajattelun kielentämisen taitoja ja oppilaat löytävät mieluisia tapoja ilmaista itseään. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista tukeva pedagogiikka luo valmiuksia oppilaille tuoda esiin luonnollisen kielen, tässä tapauksessa kirjoitetun kielen avulla, omaa matemaattista ymmärtämystä. Kun luonnollinen kieli on osa opetusta, niin se kehittää lapsen matemaattista ajattelua.

Luokassa oleva salliva ja ymmärtäväinen ilmapiiri mahdollistaa oppilaiden ilmaisemaan vapaasti tehtävistään saamiaan ratkaisuja. Näin opetukseen sisältyy paljon opettajan ja oppilaiden kuin myös oppilaiden keskinäistä keskustelua ja joskus jopa väittelyä. Kun oppilas puhuu matematiikkaa, hänen on täytynyt ensin prosessoida oma ajatus itselleen ymmärrettäväksi. Opettajan kuunnellessa oppilaan puhetta hänellä on mahdollisuus arvioida, onko oppilaalla oikea käsitys käsiteltävästä asiasta. Tämä helpottaa opettajaa arvioinnissa. Vielä tärkeämpää on kenties se, että opettajan on mahdollisuus heti auttaa oppilasta, jos oppilaalle on tullut väärä ymmärrys opetettavasta asiasta. Vähäistä ei myöskään ole se, että toisen oppilaan käyttämä puhe voi joskus auttaa myös luokkakaveria ymmärtämään asiaa paremmin kuin opettajan tuottama puhe.

Analysoiduissa tehtävissä nousi useista tehtäväpapereista esiin sana *miinustaa*. Matematiikan oppimisen tulisi edetä systemaattisesti, hierarkkisesti ja loogisesti eteenpäin, mihin kuuluu vähitellen myös mukaan tuleva täsmällinen matemaattisten käsitteiden ilmaisu. Oppimisen edistyminen edellyttää jo vakiintuneen terminologian omaksumista, joten opettajan tehtävänä kielentämisessä on tukea myös oppijoiden matemaattisen kielenkäytön kehittymistä (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Näin kuudennella luokalla oppilaiden tulisi käyttää peruslaskutoimituksiin perustuvissa tehtävissä täsmällistä ilmaisua. Esimerkiksi vähennyslaskua tehdessään oppilaiden tulisi käyttää vähentämisen prosessista ilmaisua *vähentää*. Kun luokassa käytetään luonnollista kieltä opiskeltaessa matemaattisia käsitteitä, opettajan on helppo puuttua myös oppilaiden käyttämään epätäsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun. Matematiikan abstraktin luonteen takia erityisesti matemaattisten käsitteiden opetuksessa erilaisten variaatioiden tuottamisessa ja tarkastelemisessa on huolellisella kielenkäytöllä suuri merkitys.

Joidenkin oppilaiden ratkaisuissa painottuivat standardimallin mukaiset ratkaisut. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan ne ovatkin peruskoulun oppikirjoissa tyypillisiä ja perustuvat matematiikan symbolikielen käyttämiseen. Erityisesti tätä mallia käytetään aritmetiikan tehtävissä. Perinteissä matematiikan opetuksessa olleet oppilaat olivat mahdollisesti tottuneet symbolikielen mukaiseen ratkaisun esittämisen malliin.

Viitteitä perinteiseen opetukseen liittyvästä matematiikan oppikirjaan sitoutuvasta opetuksen toteutustavasta Suomessa ovat tuoneet esille muun muassa Perkkilä (2002), Joutsenlahti ja Vainionpää (2010) sekä Lepik ym. (2015) ja Viholainen ym. (2015). Tutkijoiden mukaan edellä mainittu näkyy siten, että opetuksen suunnittelu ja toteutus perustuvat pääasiassa oppikirjojen ratkaisuihin. Oppikirjaan sitoutuvassa opetuksessa oppilaat tottuvat nopeasti niihin matemaattisten ratkaisumallien tapoihin, joita oppikirjassa esitetään ja joita opetuksessa noudatetaan. Matematiikan oppikirjoihin sitoutuva opetus rajaa oppilaan ajattelun kehittymistä. Oppikirjaan sitoutuvan opetuksen seurauksena voi olla myös se, että helposti tehtävän vastauksesta tulee tärkein asia. Luullaan, että tehtävään on olemassa vain yksi ratkaisu ja se on oppikirjan tekijän esittämä malliratkaisu. Omaa ajattelua ei uskalleta tuoda esille, koska oppilas saattaa uskoa, että vain malliratkaisun mukainen ratkaisu on ainoa oikea.

Oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmaisulle olisi hyvä antaa tilaa taktiilisen, kuviokielen, luonnollisen kielen sekä matematiikan symbolisen avulla. Näin oppilaat voivat vähitellen rakentaa matemaattista ymmärrystään yhdessä toisten vertaisten kanssa (vrt. kielentäminen). Matematiikkaa opettavien opettajien koulumuistoissa usein matematiikan opetus on rakentunut pitkälti oppimateriaalin varaan (vrt. Perkkilä, 2002). Oppikirjaan sitoutuva opetuksen malli on monelle opettajalle se tutuin ja helpoin malli opettaa. Tässä mallissa jää kuitenkin oppilaan omakohtaisen ajattelun merkitys vähemmälle. Opettajat tarvitsevat tukea monipuoliseen matematiikan opetukseen. Erityisesti tulisi tukea sitä, että opettajilla olisi koulutuksissa tilaisuuksia saada omakohtaisia kokemuksia kielentämisen monipuolisista mahdollisuuksista.

Omakohtaisten oivallusten kautta opettajat syventäisivät näkemystään kielentämisen merkityksestä käsitteiden ymmärtävään oppimiseen perustuvassa matemaattisen ajattelun kehittämisessä. Näin vähitellen opettajat voisivat tuoda omien kokemustensa pohjalta monipuolisempia työskentelytapoja matematiikan oppimisympäristöihin. Valtakunnallisessa LUMATIKKA-hankkeessa onkin vastattu edellä mainittuun opettajien tuen tarpeeseen järjestämällä koulutusta, joissa on ollut tavoitteena tarjota avaimia monipuolisen matematiikan opetuksen suunnitteluun ja toteutukseen.

Nykyinen voimassa oleva opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2014) ohjaa vahvasti siihen, että oppilaiden tulisi itse osata löytää kehittymisensä ja oppimisensa kohteita opiskeltavasta asiasta. Murata (2004) on tutkinut yhteenlaskustrategian kehitystä ensimmäisen luokan aikana. Hänen tutkimuksensa mukaan uutta strategiaa yhteenlaskussa ei opittu automaattisesti, vaan nimenomaan opettajan ohjauksen avulla ja opettajan ohjaamalla tavalla. Opettajan ohjaus oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä toimi tässä oppilaan ajattelun kehittämisen välineenä kohti abstraktiota.

Nykyisessä opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) painotetaan monipuolista matemaattista ilmaisua: puhuen, konkretian avulla, piirtäen ja symbolisesti. Konkretialla tarkoitetaan oppimisvälineiden monipuolista käyttöä. Toimintavälineet tukevat oppilaan induktiivista oppimista, jonka tavoitteena on monien yksittäisten kokemusten yleistäminen. Näin välineet ovat käsitteenmuodostuksen ja ajattelun välineitä. Tikkasen (2008) mukaan tavoitteena on edistää opittavan käsitteen abstrahoitumista ilman konkreettisia oppimisvälineitä. Oppilas tarvitsee juuri tämän matemaattisen ajattelun abstrahoitumisen esiin tuomisessa luonnollista kieltä. Pelkällä symbolisen kielen käytöllä opettaja ei voi saada selville oppilaan ajatusta ja ymmärrystä. Kun Jorma Joutsenlahti (2016b) koulutti opettajia Oulaisissa matematiikan tehtävien kielentämisestä sanallisesti, niin hän sanoi: ”Vain silloin, kun lapsi puhuu matematiikka, voit olla varma, että hän myös ajattelee matematiikkaa.” Tällä ilmaisulla hän halusi tuoda esille sanallistamisen tärkeyttä omin sanoin luonnollisella kielellä matematiikan oppimisessa.

Lähteet

Ahtee, M., Hannula, M., Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E. & Portaankorva-Koivisto, P. (2016). Esipuhe. Teoksessa S. Wass (toim.) *Iloa ongelmanratkaisuun* (s. 4–6). Otava.

Joutsenlahti, J. (2016a). *Omin sanoin matematiikan maailmassa*. Julkaisematon kielentämisen harjoitusmoniste. Tampereen yliopisto.

Joutsenlahti, J. (2016b). *Tehtävien kielentäminen sanallisesti*. [Suullinen esitys]. Koulutus Oulaisissa 14.10.2016.

Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2009* (Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9, s. 71–86). Lapin yliopisto.

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.), *Opettaja asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktiikan symposium 7.2.2003* (Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, s. 188–196). Turun yliopisto.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J., Perkkilä, P., & Tossavainen, T. (2017). Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. *FMSERA Journal*, 1(1), 99–109. https://journal.fi/fmsera/article/view/60904Luettu 19.3.2020. Viitattu 26.3.20

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2015). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.), *Monilukutaito kaikki kaikessa* (s. 57–76). Tampereen ylipiston normaalikoulu. https://trepo.tuni.fi/handle/10024/98047 Viitattu 26.3.20

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.), *Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014* (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8, s. 45–62). Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. https://helda.helsinki.fi/handle/10138/153212

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Niemi, E. K. & Metsämuuronen, J. (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 137–148). Opetushallitus.

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 129–156.

Leppäaho, H. (2018). Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 368–392). Niilo Mäki Instituutti.

Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching (s. 232–244). Routledge Falmer.

Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understandings of teen sums: Addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction*, *22*, 185–218.

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Määräykset ja ohjeet 96. Opetushallitus.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa* [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/42025

Perkkilä, P. (1999). *Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirjasarjan didaktinen analyysi.* [Lisensiaatintyö, Jyväskylän yliopisto].

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V.-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 344–367). Niilo Mäki Instituutti.

Pólya, G. (1948). *How to solve it? A new aspect of mathematical method*. (5. painos). Princeton University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–44.

Tikkanen, P. (2008). *"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin". Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana* [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18042

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Tammi.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3–4), 157–178.

Yhtälönratkaisun oppiminen teknologisen toimintamateriaalin ja kielentämisen avulla

Daranee Lehtonen[1, 2] ja Jorma Joutsenlahti[2]

[1] Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta, Tampereen yliopisto

[2] Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Tampereen yliopisto

Tiivistelmä: Kirjallisuuden ja aikaisempien tutkimusten mukaan perinteisesti koulumatematiikan opetuksessa painotettu proseduraalinen osaaminen ei yksinään riitä matematiikan oppimisen onnistumiseen. Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet painottavat oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärryksen merkitystä. Tässä artikkelissa esitellään Lehtosen väitöstutkimus esimerkkinä, kuinka oppimisteknologian käyttö voi tukea alakoululaisten matemaattisten käsitteiden ymmärrystä. Väitöstutkimuksen aikana kehitettiin moniesitysmuotoinen oppimisväline alakoululaisten yhtälönratkaisun oppimista varten. Kehitetty oppimisväline yhdistää fyysisten ja digitaalisten välineiden vahvuudet: fyysisten osien liikkuminen saa oppilaat ajattelemaan omaa toimintaa, kun taas digitaaliset osat motivoivat oppilaita oppimaan sekä mahdollistavat reaaliaikaisen ohjauksen ja palautteen saamisen. Luokkakokeilussa osoitettiin, että kehitetyn oppimisvälineen käyttö yhdessä matemaattisen ajattelun kielentämisen mallin kanssa tuki neljäsluokkalaisten yhtälönratkaisun käsitteiden oppimista. Kehitetty toimintamateriaali toimi oppilaiden oppimisen, kommunikoinnin ja vuorovaikutuksen välineenä. Oppilaat pitivät kehitettyä välinettä oman oppimisen kannalta hyödyllisenä, helppokäyttöisenä ja miellyttävänä käyttää. Lisäksi he kokivat tekemällä oppimisen ja yhteisöllisen kielentämisen mielekkääksi työtavaksi tulevaisuudessa matematiikan oppimiseen.

Avainsanat: matematiikan oppiminen, käsitteellinen ymmärrys, toimintamateriaali, oppimisteknologia, kielentäminen

Yhteystiedot: daranee.lehtonen@tuni.fi

1 Johdanto

Perinteisesti koulumatematiikan opetuksessa painotetaan oppilaiden proseduraalisen sujuvuuden kehittämistä. Kuitenkin kirjallisuus ja tutkimukset ovat osoittaneet, että *proseduraalinen osaaminen* (joustava, täsmällinen, tehokas ja tarkoituksenmukainen toimintojen suorittaminen) ei yksinään riitä matematiikan tavoitteiden mukaiseen oppimiseen (Kilpatrick ym., 2001; Schoenfeld, 2007). Kilpatrickin ja muiden (2001) mukaan matemaattinen osaaminen koostuu proseduraalisen sujuvuuden lisäksi useammasta muusta osa-alueesta, joista yksi keskeinen on *käsitteellinen ymmärrys* (matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen).

Matematiikan opetuksessa keskitytään usein sääntöihin ja niiden soveltamiseen eikä niiden ymmärrykseen perustuvaan oppimiseen (Bogomolny, 2007; Kilpatrick ym., 2001). Yhtälönratkaisu onkin yksi esimerkki näistä matematiikan sisältöalueista.

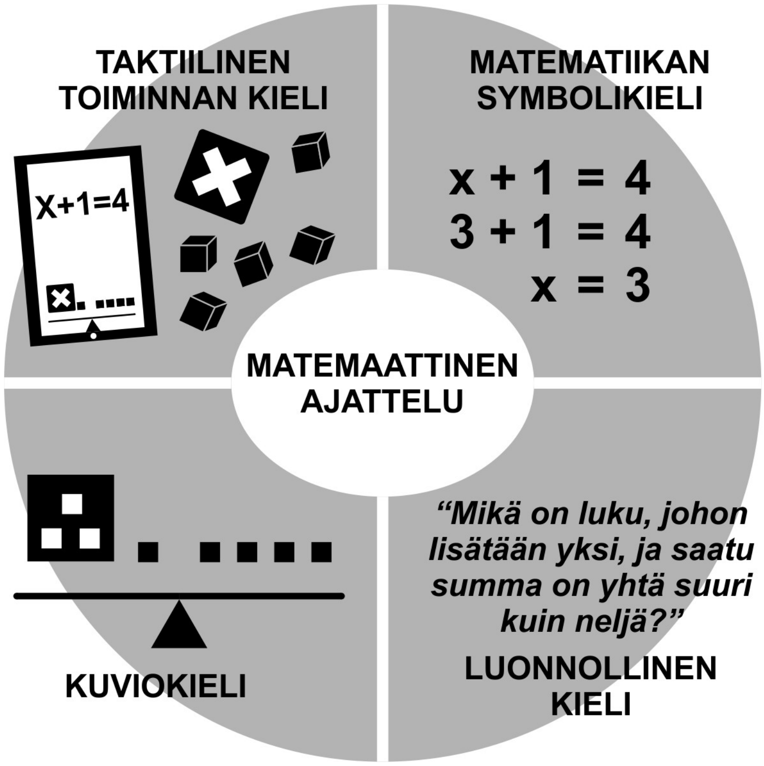
Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2015) painotetaan, että matematiikan opetuksen yhtenä tehtävänä on tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärrystä. Lisäksi korostetaan konkretian, toiminnallisuuden sekä tieto- ja viestintäteknologian keskeistä asemaa peruskoulun matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Opetuksessa oppilaita kannustetaan esittämään matemaattista ajatteluaan, päätelmiään ja ratkaisujaan kielentäen eli konkreettisilla välineillä, suullisesti, kirjallisesti, piirtäen sekä tieto- ja viestintäteknologialla. Algebra-sisältöalueen osalta tavoitteena on, että 3.–6. luokkien oppilaat tutustuvat tuntemattoman käsitteeseen, tutkivat yhtälöä sekä etsivät yhtälön ratkaisuja kokeilemalla ja päättelemällä.

Artikkelin tarkoituksena on esitellä, kuinka teknologisen ja konkreettisen toimintamateriaalin käyttö kielentämisen avulla voi tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärtävää oppimista. Esimerkkinä käytetään Lehtosen (2022) väitöstutkimusta, jossa tutkittiin *multimodaalisen* eli moniesitysmuotoisen teknologisen ja konkreettisen välineen hyödyntämistä alakoululaisten yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa.

1.1 Kielentäminen matemaattisten käsitteiden oppimisessa

Perinteiseen koulumatematiikan opetukseen on kuulunut hiljainen työskentely ja oppilaiden muodollisesti täsmällisen ilmaisun vaatimus matematiikan tunneilla. Kummassakin näistä oppilaan oma ajattelu jää pimentoon opettajalta ja vertaisryhmältä. Vain merkitty suoritus ja lopputulos on nähtävissä tai kuultavissa. Tämä on eräs havainto, minkä pohjalta on lähdetty kehittämään matemaattisen ajattelun kielentämisen pedagogista mallia (Joutsenlahti 2003) matematiikan opetukseen alakoulusta yliopistotasolle asti.

Siinä missä matematiikan symbolikieli kattaa ilmaisun matemaattisin merkein, voidaan luonnollista kieltä ilmaista sanallisesti tai kirjoitettuna, kuviokieltä piirroksin ja taktiilista kieltä esimerkiksi toimintamateriaalien ja muun oman toiminnan myötä (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Kuviossa 1 on hahmoteltu, mitä nämä mainitut kielet voisivat olla yhtälönratkaisun oppimisessa.



Kuvio 1. Kielentäminen yhtälönratkaisun oppimisessa (sovellettu Joutsenlahti ja Rättyä, 2015, s. 52)

Aikaisempien tutkimusten mukaan kielentäminen tukee koko luokan toimintaa eli oppilasta, vertaisryhmää ja opettajaa (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Kielentäminen mahdollistaa oppilaalle ja myös opettajalle multimodaalisen ilmaisun ajattelulleen, jossa kukin voi omin sanoin, piirroksin ja tekemällä näyttää omaa matemaattista ajatteluaan. Näin myös oppilas rakentaa samalla merkityksiä käsitteille ja liittää niitä aiemmin kokemaansa ja oppimaansa. Oppilaalle rakentuu ymmärrys opittavasta asiasta, eikä se ole vain muistinvarainen sääntökokoelma. Lisäksi opettaja voi arvioida ja ohjata oppilaita täsmällisemmin kunkin tarpeen mukaan. Vertaisryhmä ymmärtää usein paremmin toisten oppilaiden selityksiä kuin vain aikuisen opettajan. Vertaisryhmän kieli ja ilmaisut elävät ajassa. Kielentämisen avulla voidaan systemaattisesti rakentaa merkityksiä yksin ja ryhmässä sekä suullisesti että kirjallisesti uusista opittavista asioista. Tarkastelemme seuraavaksi kielentämistä ja toimintamateriaalin käyttöä yhtälönratkaisun opiskelussa.

1.2 Toimintamateriaalit matemaattisten käsitteiden oppimisvälineinä

Useiden oppimisteorioiden (mm. Bruner, 1966; Piaget, 1965) mukaan *toimintamateriaalit* eli toimintavälineet tai konkreettiset oppimisvälineet voivat auttaa oppilaita konkretisoimaan abstrakteja matemaattisia käsitteitä. Toimintamateriaaleita käyttäessään oppilaat rakentavat opittavan asian ymmärrystä multimodaalisuuden (muun muassa taktiilisen toiminnan ja visuaalisten esitysten) kautta (McNeil & Jarvin, 2007; Moyer, 2001). Monissa maissa, Suomi mukaan lukien, opettajat pitävät toimintamateriaalien roolia merkittävänä matematiikan oppimisessa (esim. Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Juhola, 2018; Marshall & Swan, 2008: Ylä-Rautio, 2021).

Alakoulumatematiikan oppimisessa käytetään usein toimintamateriaaleja, kuten arjen esineitä (esimerkiksi noppia ja kolikoita) tai matematiikan oppimista varten suunniteltuja välineitä (esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineitä ja murtokakkuja). Viime aikoina myös digitaalisten toimintamateriaalien, kuten tablettisovellusten, käyttö on lisääntynyt matematiikan opiskelussa. Kuitenkin on huoli, että digitaaliset oppimisvälineet voivat aiheuttaa ongelmia oppimiselle (Magruder, 2012; Pires ym., 2019).

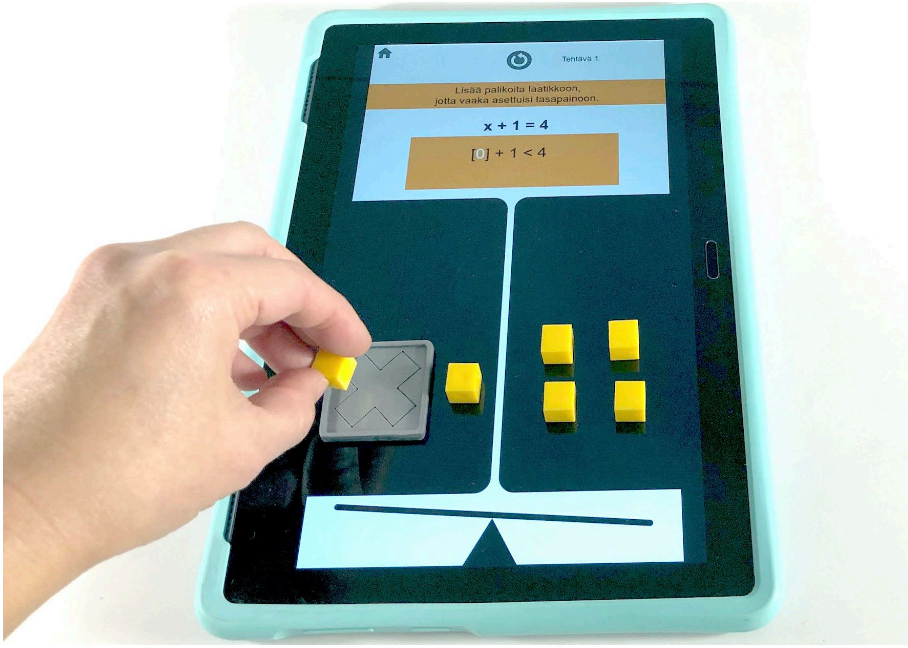
Aikaisempien tutkimusten mukaan toimintamateriaalit eivät itsessään tue oppimista, vaan niitä on käytettävä mielekkäästi ja tarkoituksenmukaisesti osana opetusta (Manches ym., 2010; McNeil & Jarvin, 2007). Toimintamateriaalien mekaanisen käytön sijaan on suositeltu, että oppilaiden on pohdittava toimintamateriaalien kautta opittua (Clements, 1999) sekä keskusteltava luokkakavereiden kanssa omista havainnoistaan ja ratakisuistaan (Marshall & Swan, 2008).

2 Multimodaalinen teknologinen toimintamateriaali yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa

2.1 Kehitetty toimintamateriaali

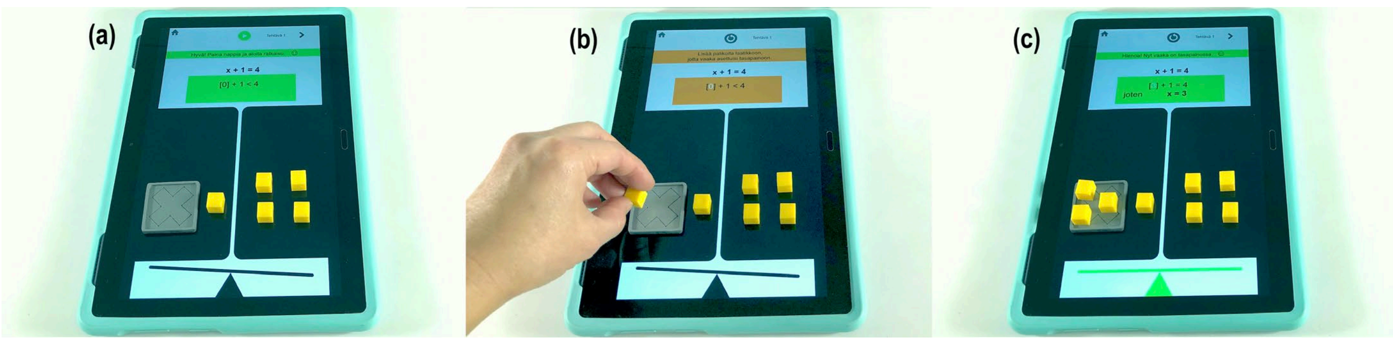
Väitöstutkimuksen esivaiheessa havaittiin, että fyysisiä (perinteisiä) toimintamateriaaleja liikuttaessa oppilaat keskittyivät oman yhtälön ratkaisemisen prosessiin ja pikkuhiljaa konkretisoivat opittavia käsitteitä. Kun taas tablettisovellusta käytettäessä monet oppilaat ratkaisivat yhtälöitä samalla tavalla kuin pelaisivat peliä. He eivät jääneet ajattelemaan opittavaa asiaa vaan painelivat ja pyyhkäisivät sormin tabletin ruutua. Toisaalta sovellus motivoi oppilaita ja antoi heille reaaliaikaista ohjausta ja palautetta.

Tampereen yliopiston tietojenkäsittelytieteen opiskelijatiimin kanssa yhteistyössä kehitettiin edellä kuvattujen havaintojen pohjalta multimodaalinen teknologinen toimintamateriaali. Kehitetty toimintamateriaali yhdistää fyysisten ja digitaalisten toimintamateriaalien vahvuudet hyödyntämällä multimodaalista teknologiaa (ks. kuva 1). Oppilas manipuloi sovellusta liikuttamalla fyysisiä esineitä (kymmenjärjestelmävälineitä ja harmaita, yhtälössä tuntematonta symboloivia levyjä) kosketusnäytön painelun ja pyyhkäisyn sijaan. Oppilaan toiminnan mukaan sovellus antaa ohjausta ja palautetta eri esitysmuotojen kautta tekstinä, kuvina ja matematiikan symboleina.



Kuva 1. Oppilaan vuorovaikutus kehitetyn multimodaalisen teknologisen toimintamateriaalin kanssa. Vuorovaikutus tapahtuu taktiilisen toiminnan, kirjoitetun, kuviokielen ja matematiikan symbolikielen kautta. (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Kuvassa 2 esitetään, miten yhtälö $x + 1 = 4$ ratkaistaan vaiheittain kokeilemalla tai päättelemällä kehitetyn toimintamateriaalin avulla.



Kuva 2. Yhtälön $x + 1 = 4$ vaiheittain ratkaiseminen kokeilemalla tai päättelemällä (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Tehtävän alussa sovellus antaa ratkaistavan yhtälön matematiikan symboleilla eli kaksi *lauseketta* (yhtäsuuruusmerkin vasen ja oikea puoli), jotka ovat yhtä suuret (esim. kuvassa 2 yhtälönä $x + 1 = 4$). Sen jälkeen oppilas muodostaa yhtälön annetuista lausekkeista fyysisillä esineillä tabletin näytössä olevaan vaakaan (esim. kuvassa 2a yksi tuntematon levy ja yksi ykköskuutio vaa'an vasemmalle puolelle ja neljä ykköskuutiota vaa'an oikealle puolelle). Yhtälön muodostamisen jälkeen oppilas ratkaisee yhtälön lisäämällä ykköskuutioita tuntemattoman levylle (esim. kuvassa 2b näkyy kuviokielellä ja matematiikan symbolikielellä, että kaksi ykköskuutiota yhteenlaskettuna on vähemmän kuin neljä ykköskuutiota eli $1 + 1 < 4$), kunnes vaaka on tasapainossa. Tällöin yhtälö on ratkaistu (esim. kuvassa 2c huomataan, että yhteen laskettaessa kolmea ja yhtä ykköskuutiota saadaan neljä ykköskuutiota. Siis tämä summa on yhtä suuri kuin neljä ykköskuutiota eli $3 + 1 = 4$).

2.2 Kokeilu alakoulussa

Kehitettyä toimintamateriaalia ja siihen liittyvää oppilaan monistetta ja opettajan opasta kokeiltiin eräässä neljännessä luokassa 45 minuutin oppitunnin aikana vuoden 2019 keväällä. Luokassa ei ollut opetettu yhtälönratkaisua aikaisemmin. Oppitunnin alussa luokanopettaja opetti koko luokalle yhtälönratkaisuun tarvittavat käsitteet annettujen materiaalien mukaan:

- Yhtälö muodostuu kahdesta lausekkeesta, jotka molemmat ovat yhtä suuret.
- Yhtälön voi kuvitella tasapainovaa'aksi, jossa molemmat puolet painavat yhtä paljon.
- Yhtälössä voi myös esiintyä tuntematon luku, jota voidaan merkitä millä tahansa kuviolla tai merkillä, esimerkiksi tähden kuvalla tai x-kirjaimella.
- Yhtälön ratkaisut ovat tuntemattoman luvun arvot, joilla yhtälö on tosi eli yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret.
- Yhtälön voi ratkaista kokeilemalla tai päättelemällä, mikä luku sopii tuntemattoman paikalle, jotta yhtälö on tosi.

Tämän jälkeen opettajan johdolla koko luokka ratkaisi muutamia yhtälöitä yhdessä joko kokeilemalla tai päättelemällä. Sitten oppilaat tekivät itsenäisesti harjoitustehtävät parin kanssa. Jotta toimintamateriaalia käytettäisiin mielekkäällä tavalla, oppilaita kannustettiin muodostamaan ja ratkaisemaan yhtälöitä yhdessä käyttämällä toimintamateriaalia sekä samalla keskustelemaan parin kanssa omista havainnoistaan ja ratkaisuistaan (ks. kuva 3). Yhtälön ratkaisemisen jälkeen jokainen oppilas kuvasi kirjoittamalla ratkaisun ja sen prosessin omalle monisteelle tekstinä, kuvina ja/tai matematiikan symboleina.

Kuva 3. Oppilaspari harjoitteli yhtälönratkaisua kehitetyn toimintamateriaalin ja kielentämisen avulla.

Luokkatyöskentelyssä toimintavälineellä havaittiin kolme erilaista käyttötarkoitusta. Oppilaat käyttivät sitä oppimisvälineenä, kommunikoinnin ja vuorovaikutuksen välineenä seuraavilla tavoilla.

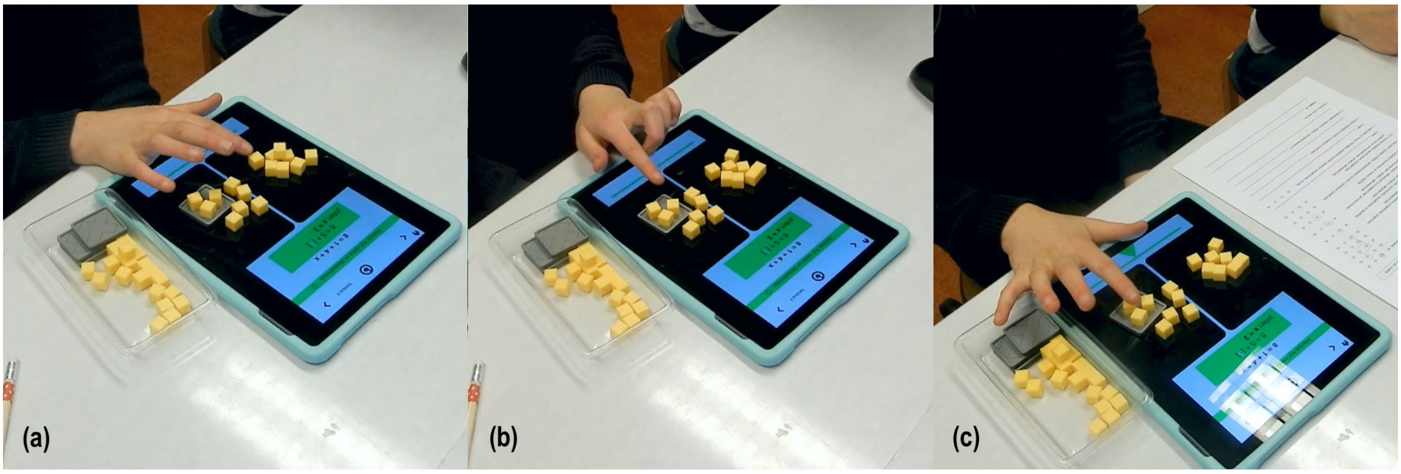
Oppimisvälineenä: Parityöskentelyn aikana oppilaat rakensivat yhtälönratkaisun käsitteiden ymmärrystä kielentämisen ja vuorovaikutuksen kautta. Oppilas ratkaisi yhtälöitä konkreettisesti fyysisiä esineitä liikuttamalla. Kun oppilas liikutti esineitä, yhdisti taktiilisen toimintansa muihin esitysmuotoihin (puhuttuun, kirjoitettuun, kuvio- ja matematiikan symbolikieleen) sekä selitti toiselle päätelmiään ja ratkaisujaan, hän jäsensi pikkuhiljaa omaa matemaattista ajatteluaan. Samalla toinen oppilas oppi katsomalla ja kuuntelemalla, miten pari ratkaisi yhtälöitä vaiheittain. Koska oppilaat saivat sovelluksesta nopeita ohjeita ja palautteita, esimerkiksi mitä pitäisi tehdä tai oliko ratkaisu oikea, he pystyivät tekemään tehtäviä pääosin ilman opettajan apua. Lisäksi oppilaat keskittyivät tehtävien tekemiseen, eikä toiminnan aikana tullut ulkopuolisia häiriötekijöitä, jotka olisivat keskeyttäneet heidän toimintansa.

Kommunikoinnin välineenä: Tässä kokeilussa monet oppilaat selittivät sekä itselleen että parilleen ratkaisuja paitsi luonnollisella kielellä, niin myös toiminnan kielellä toimintamateriaalien avulla. Onkin havaittu, että lapset yleensä muodostavat asioista omaa ymmärrystään ennen kuin osaavat ilmaista sen puheena (Kilpatrick ym., 2001) tai kirjoituksena (Laine ym., 2018).

Vuorovaikutuksen välineenä: Toimintamateriaali auttoi myös oppilaita olemaan vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Sen avulla oppilaat työskentelivät yhdessä aktiivisesti ilman opettajan kannustusta. Oppilaiden vuorovaikutus tapahtui, esimerkiksi kun toinen oppilas ratkaisi yhtälöitä ja ääneen ajatteli ratkaisujaan, toinen katsoi ja kuunteli tai kun toinen oppilas ratkaisi yhtälöitä puhumatta, toinen katsoi.

Oppitunnin jälkeen jokaista oppilasta pyydettiin näyttämään ja selittämään tutkijalle, miten hän ratkaisi yhtälöitä toimintamateriaalilla. Oppilaiden toiminnat ja selitykset osoittivat, että he ymmärsivät yhtälönratkaisun käsitteet ja osasivat ratkaista annetut yhtälöt. Kuvassa 4 eräs oppilas esitti ja selitti tutkijalle, miten hän ratkaisi yhtälön $8 = 1 + 4 + x$ toimintamateriaalilla:

> (a) Tässä on kahdeksan (ositti vaa'an vasemmalla puolella olevaa kahdeksan ykköskuutiota). (b) Ja tämän [vaa'an oikean puolen] (osoitti vaa'an oikean puolen) pitää olla yhtä painava [kuin vasen puoli]. (c) Tähän (osoitti vaa'an oikealla puolella olevan tuntemattoman levyn, jossa oli kolme ykköskuutiota) pitää lisätä [kolme ykköskuutiota], jotta nämä [vaa'an oikealla puolella olevat ykköskuutiot] ovat yhteensä kahdeksan.



Kuva 4. Oppilas selitti yhtälön $8 = 1 + 4 + x$ ratkaisusta. (CC BY 4.0: Lehtonen ym., 2020, s. 10)

Loppuhaastattelussa oppilaat suhtautuivat kehitettyyn toimintamateriaaliin positiivisesti monista syistä. Oppilaiden vastauksista nousi esille kolme toimintamateriaalin mielekkyyttä tukevaa ominaisuutta: *hyödyllisyys*, *helppokäyttöisyys* ja *miellyttävä käyttökokemus*.

Hyödylliseksi oppilaat kokivat sen, että teknologia mahdollisti reaaliaikaisen opastuksen yhtälöitä ratkoessa. Toimintamateriaali toimi samalla myös laskun tai ratkaisun tarkistamisvälineenä. Hyödyllisenä pidettiin myös sitä, että toimintaväline tuki uusien käsitteiden konkretisoinnissa sekä johdatteli tutkivaan ja itseohjautuvaan oppimiseen.

Oppilaiden mielestä toimintamateriaalia oli helppo käyttää intuitiivisen käyttöliittymän ansiosta. Tässä auttoi se, että oppilailla oli jo entuudestaan kokemusta tablettilaitteiden käytöstä. Fyysisten esineiden manipulointi koettiin myös vaivattomaksi.

Oppilaat suhtautuivat käsillä tekemiseen, teknologian ja parin kanssa työskentelyyn motivoivampana työskentelytapana perinteiseen kynä-paperi-työskentelyyn verrattuna. Kenties tästä miellyttävästä ja motivoivasta käyttökokemuksesta johtuen oppilaat kertoivat haluavansa käyttää toimintamateriaalia yhtälönratkaisuun tulevaisuudessakin.

Vähän aikaa tutkimuksen jälkeen tutkija sai kuulla luokan opettajalta, että hänen oppilaansa kokivat tekemisen kautta oppimisen ja yhteisöllisen kielentämisen mielekkääksi työtavaksi. Oppilaat halusivat jatkossakin matematiikan tunneilla tehdä kavereiden kanssa harjoitustehtäviä konkreettisia välineitä käyttäen ja keskustellen.

3 Lopuksi

Väitöstutkimuksessa kehitetty teknologinen toimintamateriaali käytettiin kielentämällä ja vertaisryhmän kanssa vuorovaikutuksessa yhtälönratkaisun käsitteiden oppimisessa. Tutkimustulokset ovat linjassa kirjallisuuden kanssa sen suhteen, että toimintamateriaalit tukevat oppilaiden uusien matemaattisten käsitteiden oppimista (Ikäheimo & Risku, 2004), kommunikointia (Hiebert ym., 1997) ja vuorovaikutusta (Harja, 2015).

Edellä esitetyt esimerkit osoittavat, että teknologisten, konkreettisten välineiden käyttö kielentämisen avulla voi todella tukea oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärrystä, kun niitä käytetään mielekkäästi ja pedagogisesti. Teknologiaa on siis käytettävä tarkoituksenmukaisesti eikä vain teknologian itsensä vuoksi.

Toivomme, että artikkelimme kannustaa opettajia oppilaiden matemaattisten käsitteiden ymmärryksen tukemiseen, esimerkiksi toimintamateriaalien avulla, sääntöjen ulkoa muistamisen ja mekaanisen osaamisen sijaan. LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelman kurssit tarjoavat lisää tietoa, miksi ja miten kannattaa hyödyntää kielentämistä ja toiminnallisuutta eri luokka-asteiden matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Toki matematiikan ymmärtävä oppiminen vie aikaa, mutta on kuitenkin vaivan arvoista. Käsitteiden ymmärrys luo pohjan oppilaiden matemaattiselle osaamiselle sekä lisää oppimisen mielekkyyttä ja iloa.

Kiitokset

Artikkeli pohjautuu Lehtosen väitöstutkimukseen (2022), jossa dosentit Jorma Joutsenlahti ja Päivi Perkkilä toimivat ohjaajina. Toimintamateriaali kehitettiin Tampereen yliopistossa yhteistyössä Fouzia Khanin, Juho Korkalan, Roni Perälän, Niko Sainion, Krishna Bagalen ja Lucas Machadon kanssa.

Lähteet

Bogomolny, M. (2007). Raising students' understanding: Linear algebra. Teoksessa J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (toim.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2 Research reports (s. 65–72). Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45–60. https://doi.org/10.2304/ciec.2000.1.1.7

Harja, A. (2015). *Toiminnallisen matematiikan mahdollisuuksia etsimässä: "Sen kautta voijaan luoda niin paljon iloa ja yhteistyötä ja semmosta syvällisempää ymmärtämistä"*. [Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. JYX. https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/59889/URN%3aNBN%3afi%3ajyu-201810224471.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. NH. Print.

Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. (2004). Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 222–240). Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & T. Marttila (toim.*), Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta*. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, s.188–196).

Joutsenlahti J., & Rättyä K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus: Kohti kokonaisvaltaista oppimista*. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8, s. 45–62).

Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Nieminen & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, s. 137–148). Opetushallitus.

Juhola, A. (2018). *Luokanopettajien käsityksiä matematiikan oppimisesta toimintavälineillä* [Pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto]. UEF eRepo. https://erepo.uef.fi/bitstream/handle/123456789/20469/urn_nbn_fi_uef-20181497.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (toim.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Laine, A., Ahtee, M., Näveri, L., Pehkonen, E., & Hannula, M. S. (2018). Teachers' influence on the quality of pupils' written explanations – Third-graders solving a simplified arithmagon task during a mathematics lesson. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 6*(1), 87–104. https://doi.org/10.31129/LUMAT.6.1.255

Lehtonen, D., (2022). *´Now I get it!´: Developing a real-world design solution for Understanding Equation-Solving Concepts*. [Väitöskirja, Tampereen yliopisto]. Trepo.

https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/136918/978-952-03-2250-2.pdf?sequence=5&isAllowed=y

Lehtonen, D., Machado, L., Joutsenlahti, J., & Perkkilä, P. (2020). The potentials of tangible technologies for learning linear equations. *Multimodal Technologies and Interaction, 4*(4), Artikkeli 77. https://doi.org/10.3390/mti4040077

Magruder, R. (2012). *Solving linear equations: A comparison of concrete and virtual manipulatives in middle school mathematics*. [Väitöskirja, University of Kentucky]. UKnowledge. https://uknowledge.uky.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1001&context=edc_etds

Manches, A., O'Malley, C., & Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: A comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers and Education, 54*(3), 622–640. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.09.023

Marshall, L., & Swan, P. (2008). Exploring the use of mathematics manipulative materials: Is it what we think it is? Teoksessa J. Renner, J. Cross & L. McCormack (toim.), *Proceedings of EDU-COM 2008 International Conference—Sustainability in higher education: Directions for change* (s. 338–350). Edith Cowan University.

McNeil, N. M., & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice, 46*(4), 309–316.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 175–197. https://doi.org/10.1023/A:1014596316942

Opetushallitus. (2015). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Suomen yliopistopaino.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. W. W. Norton & Company.

Pires, A. C., González Perilli, F., Bakala, E., Fleisher, B., Sansone, G., & Marichal, S. (2019). Building blocks of mathematical learning: Virtual and tangible manipulatives lead to different strategies in number composition. *Frontiers in Education, 4,* Artikkeli 81. https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00081

Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? Teoksessa A. H. Schoenfeld (toim.), *Assessing mathematical proficiency* (Vol. 53, ss. 59–73). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378

Ylä-Rautio, I. (2021). *Luokanopettajien käsityksiä ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulun matematiikan opetuksessa* [Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto]. Helda. https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/328600/Yla-Rautio_pro_gradu_2020.pdf?sequence=2

Yhteisöllisyyttä, ongelmanratkaisua ja muita 21. vuosisadan taitoja yläkoulun ja lukion matematiikan opetukseen

Päivi Portaankorva-Koivisto[1] ja Antti Viholainen[2]

[1] Kasvatustieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto
[2] Luonnontieteiden ja metsätieteiden tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Tulevaisuudessa tarvittavissa taidoissa korostuvat useiden näkemysten mukaan sekä ajattelun taidot että yhteistyö- ja viestintätaidot. LUMATIKKA-hankkeen luokkien 7–9 ja lukion matematiikan opetukseen suunnatuilla kursseilla painotetaan niin sanottuihin 21. vuosisadan taitoihin liittyen yhteisöllistä oppimista, matemaattista kielentämistä, mallintamista ja ongelmanratkaisua. Näiden asioiden painottuessa matematiikan opetuksesta tulee vuorovaikutteista ja oppilaiden omaa ajattelua aktivoivaa. Oppilaat tarvitsevat kykyä päätellä, perustella ja havainnollistaa ajatteluaan eri tavoin. Tällöin korostuu myös formatiivisen arvioinnin ja erityisesti palautteen merkitys opetuksen osana. LUMATIKKA-täydennyshankkeen yläkoulun 7–9 kurssilla lähtökohtana on oppilaslähtöisyys ja toiminnallisuus. Lukion kurssilla tavoitteena ovat opiskelijakeskeisyys ja opiskelun mielekkyys. Tässä artikkelissa perustelemme tarkemmin näille kursseille valittujen sisältöjen merkitystä.

Avainsanat: yhteisöllinen oppiminen, ongelmanratkaisu, kielentäminen, formatiivinen arviointi, 21. vuosisadan taidot

Yhteystiedot: paivi.portaankorva-koivisto@helsinki.fi

1 Johdanto

Tässä artikkelissa perustelemme LUMATIKKA-hankkeen yläkoulun ja lukion opettajille suunnattujen täydennyskoulutuskursseille valittujen sisältöjen suuntaviivoja kurssin toteuttajien näkökulmasta. Yläkoulun kurssi on otsikoitu Luokkien 7–9 matematiikkaa oppilaslähtöisesti ja toiminnallisesti. Se kuvastaa hyvin sisällöissä painottuvaa vuorovaikutteisuutta ja aktiivisuutta. Lukion kurssi Lukiomatematiikkaa opiskelijakeskeisesti ja mielekkäästi ottaa myös esille oppimisen merkityksellisyyden. Molempia kursseja yhdistävät yhteisöllisyys, ongelmanratkaisu ja mallintaminen. Seuraavissa alaluvuissa tarkastelemme tarkemmin, miksi juuri nämä sisällöt on nähty tärkeiksi ajatellen opettajien täydennyskoulutusta.

Kaiken taustalla ovat *tulevaisuuden taidot* tai niin kutsutut *21. vuosisadan taidot*, jotka ovat olleet keskiössä, kun eri maissa on hahmoteltu opetussuunnitelmien ääriviivoja (Binkley ym., 2012). Näin näyttäisi olevan myös meillä Suomessa. Esimerkiksi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 kuvataan jo alkulehdillä, miten perusopetuksen tehtävänä on ”ohjata oppilaita löytämään omat vahvuutensa ja rakentamaan tulevaisuutta oppimisen keinoin” (Opetushallitus, 2014, s. 18). Samoin lukion opetussuunnitelmien perusteissa (Opetushallitus, 2019, s. 16) todetaan, että ”lukiokoulutus ohjaa opiskelijaa tulevaisuuden suunnitelmien laadintaan, maailmankansalaisuuteen kasvamiseen ja jatkuvaan oppimiseen”. Tulevaisuuden taidot nähdään siis keskeisinä opetuksen ja oppimisen kohteina riippumatta oppiaineista.

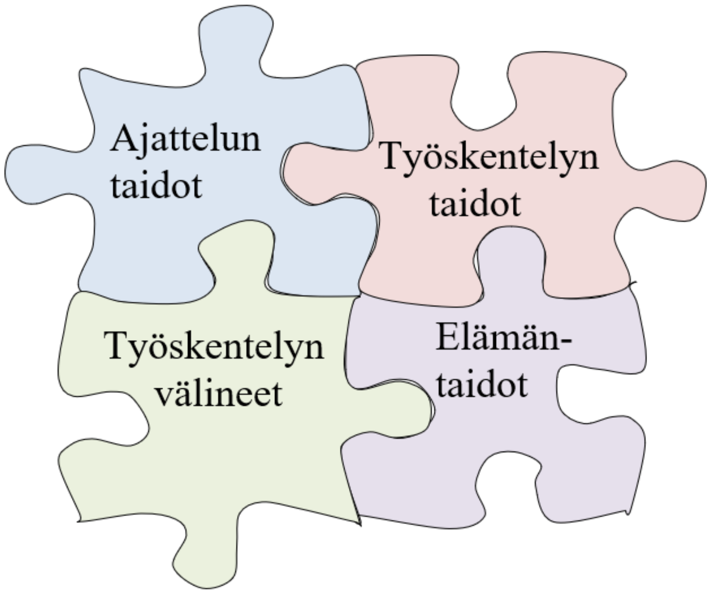
Taulukko 1. OECD:n (2005) 21. vuosisadan kompetenssit

TYÖVÄLINEIDEN VUOROVAIKUTTEINEN KÄYTTÖ
1. Kielen, symbolien ja tekstien käyttö
2. Tiedon ja informaation käyttö
3. Teknologian käyttö
HETEROGEENISISSÄ RYHMISSÄ TOIMIMINEN
4. Kyky tulla toimeen muiden kanssa
5. Kyky tehdä yhteistyötä
6. Kyky hallita ja ratkaista konflikteja
ITSENÄINEN TYÖSKENTELY
7. Kyky toimia osana suurempaa kokonaisuutta
8. Kyky muodostaa ja toteuttaa elämänsuunnitelmia ja henkilökohtaisia projekteja
9. Kyky puolustaa ja vaatia oikeuksiaan, intressejään, rajojaan ja tarpeitaan

Kirjallisuudessa on tarjolla 21. vuosisadan taidoille useita eri kehikoita, joista eräs tunnetuimmista on OECD:n vuosina 1997–2002 toteutetun DeSeCo-projektin (Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations) määrittelemät *yhdeksän kompetenssia* (taulukko 1) (Miettinen, 2019). Tässä kehikossa korostuvat erityisesti kyky työskennellä varioivissa ympäristöissä, toimia yhdessä toisten kanssa sekä myös kyky työskennellä itsenäisesti. Eri kehikoita kuitenkin yhdistää juuri tavoite elinikäisestä oppimisesta ja siihen liittyvistä taidoista (Häkkinen ym., 2017).

Eritavoin kiteytetyt 21.vuosisadan taidot voidaan jakaa neljään luokkaan (kuvio 1)

1. *ajattelun taidot*, kuten kriittinen ajattelu, luovuus ja ongelmanratkaisu
2. *työskentelyn taidot*, kuten yhteistyö- ja viestintätaidot
3. *työskentelyvälineisiin liittyvät monilukutaidot,* kuten data-, media- ja digitaidot, sekä
4. *elämäntaidot*, joihin kuuluu yksilöllisiä kehitettäviä piirteitä, kuten joustavuus, johtajuus, aloitteellisuus, tuottavuus ja ihmistaidot (Binkley ym., 2012).



Kuvio 1. Neljään luokkaan jaotellut 21. vuosisadan taidot (Binkley ym., 2012)

Vaikka 21. vuosisadan taidot hyväksytäänkin yleisesti monien opetussuunnitelmien taustaksi, niitä kohtaan on esitetty myös kritiikkiä. Pääasiallinen kritiikki kohdistuu siihen, että ne keskittyvät vain *geneerisiin taitoihin*, eivätkä ota huomioon eri maiden kulttuureita, yleissivistystä ja eri tiedonalojen taitoja (Miettinen, 2019). Lisäksi ne liittyvät vahvasti *kompetenssiajatteluun*, joka tarkastelee kasvatusta mitattavuuden näkökulmasta nähden sen erityisen tärkeäksi ihmisten työllistymisen ja talouden kehityksen kannalta ja samalla kaventaen kasvatuksen tarkoitusta ja sisältöjä (Miettinen, 2019). Seuraavassa luvussa tarkastelemme, miten 21. vuosisadan taidot näkyvät Suomessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (taulukko 2) ja lukiokoulutuksessa.

2 Oppimistavoitteet opetussuunnitelmien perusteissa

2.1 Tavoitteet peruskoulussa

Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa 21. vuosisadan taidot näkyvät erityisesti laaja-alaisen osaamisen kuvauksissa, mutta matematiikan oppiaineessa monet näistä odotuksista tulevat esille myös työskentelytaidoissa. Taulukko 2 esittää, miten matematiikan työskentelyt taidot sijoittuisivat suhteessa 21.vuosisadan taitoihin.

Taulukko 2. Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden matematiikan päättöarvioinnin kriteerit T2–T9 suhteutettuna 21. vuosisadan kompetensseihin

21. vuosisadan taidot		**Matematiikan päättöarvioinnin kriteerit (Opetushallitus, 2014)**
Ajattelun taidot	Kriittinen ajattelu	T8 Tiedon analysointi ja kriittinen tarkastelu
	Luovuus	T5 Ongelmanratkaisutaito
	Ongelman-ratkaisu	T5 Ongelmanratkaisutaito
Työskentelyn taidot	Yhteistyö	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Viestintä	T4 Matemaattinen ilmaisu
Työskentelyn välineet	Datataidot	T9 Tieto- ja viestintäteknologian käyttö
	Mediataidot	T7 Matematiikan soveltaminen
	Digitaidot	T9 Tieto- ja viestintäteknologian käyttö
Elämäntaidot	Joustavuus	T3 Opittujen asioiden yhteydet
	Johtajuus	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Aloitteellisuus	T2 Vastuunottaminen opiskelusta
	Tuottavuus	T6 Taito arvioida ja kehittää matemaattisia ratkaisuja
	Ihmistaidot	T2 Vastuunottaminen opiskelusta

Matematiikassa opetuksen tavoitteita on kaikkiaan 20. Ensimmäiset kaksi tavoitetta liittyvät opetuksen merkitykseen, arvoihin ja asenteisiin. Tavoite 1 on *vahvistaa oppilaan motivaatiota, myönteistä minäkuvaa ja itseluottamusta matematiikan oppijana*, eikä sitä ole tarkoitus arvioida. Tämän vuoksi se on jätetty pois taulukon 2 luokittelusta. Tavoite 2 *Vastuunottaminen opiskelusta* sisältää sekä työskentelyn taitoja ryhmässä, että kykyä johtajuuteen ja aloitteellisuuteen. Tavoite 3 *Opittujen asioiden yhteydet* syventää ajattelun joustavuutta. Tavoite 4 kohdistuu *matemaattiseen ilmaisuun* ja näkyy erityisesti viestintätaidoissa. Tavoite 5 *Ongelmanratkaisutaidot* on suoraan yhdistettävissä ajattelun kompetensseihin. Tavoite 6 sisältää *taidon arvioida ja kehittää matemaattisia ratkaisuja* ja se voidaan tulkita tuottavuudeksi. Tavoite 7 *Matematiikan soveltaminen* kytkeytyy mediataitoihin ja kykyyn kytkeä matematiikka reaalimaailmaan. Tavoite 8 liittyy *tiedon analysointiin ja kriittiseen tarkasteluun* ja soveltuu myös sellaisenaan ajattelun kompetensseihin. Viimeisenä tavoite 9 *Tieto- ja viestintäteknologian käyttö* on yhteydessä sekä data- että digitaitoihin.

2.2 Tavoitteet lukiossa

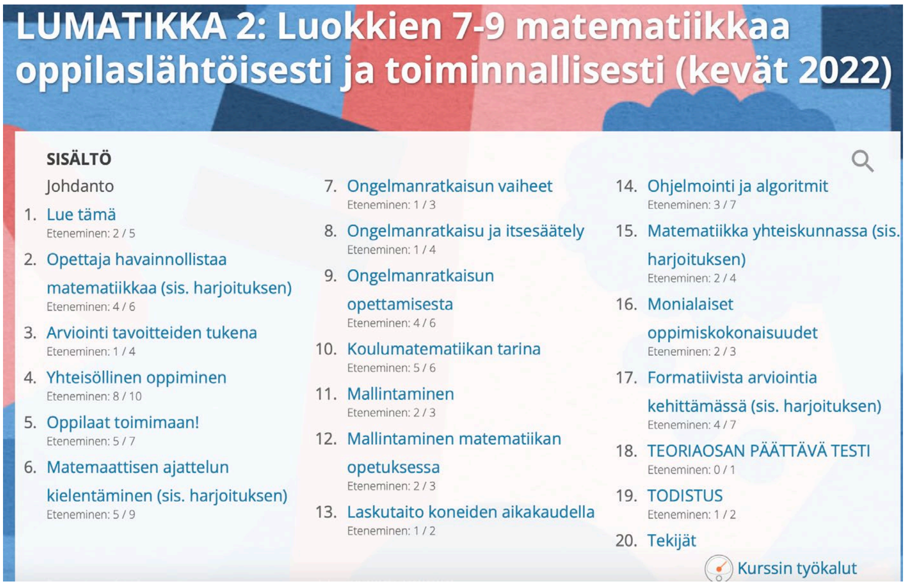
Kuten perusopetuksen, niin myös lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2019) useat 21. vuosisadan taidot tulevat esiin. Kaikkien selkeimmin korostuvat ajattelun taidot. Opetussuunnitelman mukaan lukion matematiikan opetuksen tulisi *kehittää luovan ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja* sekä *rohkaista* *tutkivaan ja kokeilevaan toimintaan*. Lisäksi oppimistavoitteissa mainitaan *väittämien oikeellisuuden tutkiminen*, *perustelujen laatiminen* sekä *perustelujen pätevyyden ja tulosten yleistettävyyden arviointi*. Työskentelytaidoista mainitaan *vaihtelevat työtavat yksin ja yhdessä työskennellessä*. Vuorovaikutusosaamista korostetaan yleisesti, ja erityisesti mainitaan vielä *kyky keskustella matematiikasta ja perustella väitteitä*. Data-, media- ja digitaitojen suhteen mainitaan *tarkoituksenmukaisten menetelmien, ohjelmistojen ja tietolähteiden käyttö*. Lisäksi tavoitteissa tulee esiin *kyky seurata matemaattista esitystä ja lukea matemaattista tekstiä* sekä *kyky arvioida eri muodoissa tarjottua matemaattista informaatiota*.

Vuoden 2019 lukion opetussuunnitelma korostaa selkeästi aiempia opetussuunnitelmia enemmän laaja-alaista osaamista ja oppiaineiden välistä yhteistyötä. Matematiikan opiskelun tulisi tukea ”globaali- ja kulttuuriosaamisen sekä monitieteisen ja luovan osaamisen laaja-alaisia tavoitteita” (Opetushallitus, 2019, s. 221). Opetussuunnitelman mukaan lukiomatematiikan opintojen tulisi *vahvistaa myös opiskelijan yhteiskunnallista osaamista, ympäristöosaamista, eettisyyttä ja hyvinvointiosaamista* tarjoamalla virikkeitä sen pohtimiseen, *miten matematiikan taitoja voisi hyödyntää kestävään kehitykseen ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa*. Erikseen mainitaan, että opiskelijan tulisi *oppia ymmärtämään matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja niiden yhteyksiä laajempiin kokonaisuuksiin* sekä matematiikassa että muissa oppiaineissa. Nämä kaikki liittyvät elämäntaidoissa mainittuihin teemoihin.

3 LUMATIKKA-kurssit matematiikan opetuksen tueksi

3.1 Peruskoulun luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevä kurssi

LUMATIKKA-hankkeen luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevä osio pyrkii huomioimaan osaltaan 21. vuosisadan taitojen kehittämisen erityisesti ongelmanratkaisun, matemaattisen ilmaisun, yhteisöllisyyden ja matematiikan soveltamisen näkökulmista. Osiossa käsitellään tutkimusten kautta esille tulleita matematiikan opetuksen kehittämiskohteita ja vastataan arjen työelämässä opetussuunnitelmien edellyttämällä tavalla toimivien opettajien tarpeisiin. Osiossa on yhteensä 16 teemaa (kuva 1).



Kuva 1. LUMATIKKA-hankkeen luokkien 7–9 matematiikkaa käsittelevän kurssin sisältö

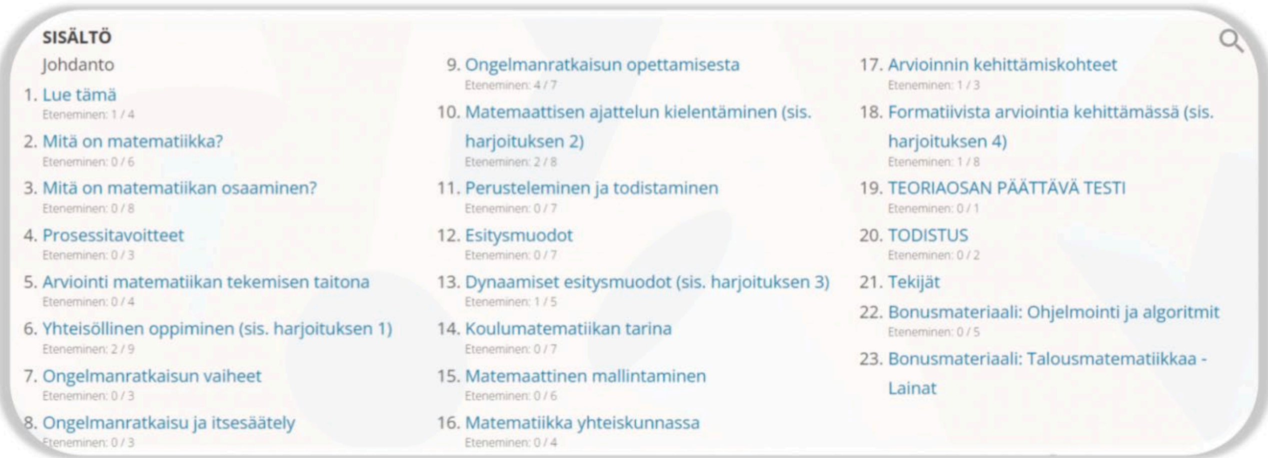
Kurssi alkaa *havainnollistamisen* käsittelemisellä, mikä herättelee opettajan pohtimaan erilaisten *representaatioiden* merkitystä matematiikan opetuksessa. Havainnollisuus linkittyy erityisesti 21. vuosisadan taidoista työskentelyn välineisiin (ks. taulukko 2). Kun on tutustuttu havainnollisuuteen, tarkastelun kohteeksi tulevat *työskentelyn taidot*. Ensimmäisenä näistä on *yhteisöllisyys*, sitten *yhdessä toimiminen* ja lopulta *kielitietoinen matematiikan opetus*. *Ajattelun taidoissa* yläkoulun 7–9 luokkien osiossa keskitytään *ongelmanratkaisuun* ja *mallintamiseen*, sekä huomataan, että yhteisöllinen oppiminen ja kielentäminen liittyvät kiinteästi sekä näihin että sanallisiin tehtäviin (Björn ym., 2019), tukien näin kaikki toisiaan.

Kurssi sisältää myös kytkentöjä *matematiikan yhteiskunnalliseen merkitykseen*. Esimerkiksi *ohjelmoinnista* ja samoin *monialaisista oppimiskokonaisuuksista* löytyy omat osionsa, joiden tavoitteena on, että oppilaat voivat hahmottaa ”koulussa opiskeltavien asioiden merkitystä oman elämän ja yhteisön sekä yhteiskunnan ja ihmiskunnan kannalta”, sekä samalla saada ”aineksia maailmankuvansa laajentamiseen ja jäsentämiseen” (Opetushallitus, 2014, 31). Näiden sisältöjen voidaan katsoa tukevan 21. vuosisadan taitojen elämän taitoja. Kurssin päättää *formatiivisen arvioinnin* osio, jonka tavoitteena on tukea oppilaan oppimista palautteen avulla ja vahvistaa hänen itseohjautuvuuttaan.

3.2 Lukion matematiikkaa käsittelevä kurssi

Lukiomatematiikan opetukseen suunnatussa osiossa (kuva 2) lähdetään liikkeelle *matematiikan perusluonteesta*. Samalla pohditaan, mikä matematiikan opetuksessa on olennaista ja tärkeää ja mistä koostuu nykypäivänä tarvittava hyvä matemaattinen osaaminen. Nämä kysymykset ovat ajankohtaisia siitä syystä, että teknologisten sovellusten ja *CAS-laskennan* käyttöönotto on monella tapaa muuttanut matemaattisen työskentelyn luonnetta etenkin lukiossa.

Tämän jälkeen lukio-osuuden kurssilla keskitytään erityisesti amerikkalaisen matematiikan opetuksen alan kansallisen järjestön NCTM:n (National Council of Teachers of Mathematics) standardeissakin esille tuleviin *matematiikan prosessitavoitteisiin* eli a) *ongelmanratkaisuun*, b) *perusteluun ja todistamiseen*, c) *matemaattiseen kommunikointiin*, d) *matemaattisen tiedon esitystapoihin* ja e) *yhteyksien ymmärtämiseen*. Näiden teemojen lisäksi kurssi tarjoaa arviointiin ja yhteisölliseen oppimiseen useita opiskelijakeskeisyyttä painottavia näkökulmia.



Kuva 2. LUMATIKKA-hankkeen lukiomatematiikkaa käsittelevän kurssin sisältö.

Seuraavaksi pureudumme tarkemmin joihinkin näistä sisältöalueista ja perustelemme niiden merkitystä tutkimuksen näkökulmasta. Tarkastelemme aluksi sisältöjä, jotka tulevat esille sekä luokkien 7–9 kurssilla että lukion kurssilla. Näistä ensimmäisenä on yhteisöllisyys, joka myöhemmin yhdistyy kielentämiseen, mallintamiseen ja ongelmanratkaisuun osana matematiikan oppimista.

4 Yhteisöllisyys

Yhteisöllisyyteen liittyvät tavoitteet painottuvat vahvasti sekä 21. vuosisadan tavoitteissa että matematiikan opetussuunnitelman perusteissa – olivatpa ne sitten yläluokille (Opetushallitus, 2014) tai lukioon (Opetushallitus, 2019) suunnattuja. Nämä ovatkin keskeisiä teemoja myös molemmilla edellä esitellyillä LUMATIKKA-hankkeen kursseilla. Yhteisöllisyys tulee esille erityisesti, kun pohditaan tulevaisuuden työelämätaitoja ja tarvetta jakaa ideoita ja yhdistää kunkin erilaista osaamista.

Yhteisöllisyyden oppimiseen liittyvät tavoitteet ovat tärkeitä jo itsessään, mutta toisaalta yhteisöllisyyttä voidaan pitää myös oppijoita aktivoivana oppimisen välineenä. Parhaimmillaan yhteisöllisyys tukee oppimista, ja silloin on kyse *yhteisestä tiedonmuodostuksesta*, merkitysten rakentamisesta ja yhteisen ymmärryksen etsimisestä. Näissä työskentelyn taidoissa yhteisölliseen oppimiseen yhdistyy kysymysten tekemistä, selittämistä, perustelemista ja omien näkemysten puolustamista sekä työstämistä. (Häkkinen ym., 2017.)

Yhteisöllistä oppimista voidaan tarkastella kolmesta näkökulmasta. Ensinnäkin yhteisöllisessä oppimisessa on kyse yhdessä toimimisesta, jolla edistetään oppimista eri oppiaineissa (*collaborating to learn*). Tässä merkityksessä tavoitteena on luoda sellainen yhteisöllinen oppimisympäristö, joka houkuttelee ja koukuttaa osallistujia uuden tiedon ääreen ja oppimaan. Toiseksi yhteisöllistä oppimista voidaan tarkastella metataitona, jolloin tavoitteena on nimenomaan oppia työskentelemään yhdessä (*learning to collaborate*). Kolmas näkökulma on metodinen näkökulma eli opettaja käyttää yhteisöllistä oppimista opetusmenetelmänään (*learning to teach by applying collaborative learning approaches*). Hän kannustaa oppilaita kyselemään, selittämään, perustelemaan, väittelemään ja työstämään ajatuksiaan yhdessä muiden kanssa. (Häkkinen ym., 2017.) Yhteisöllisesti siis opitaan sekä 21. vuosisadan taitoja että matematiikkaa. Opiskeltaessa matematiikkaa yhteisöllisesti tulee opetuksen aikana kiinnittää huomiota oppijoiden matemaattisen ajattelun kielentämiseen ja matemaattiseen ilmaisuun.

Vaikka yhteisöllinen oppiminen on havaittu tutkimuksissa erinomaiseksi työmuodoksi erityisesti opiskeltaessa matemaattista päättelyä, se ei ole kovin suosittua. Haasteena on, että se vaatii opettajalta paljon ohjaustaitoja (Schwarz ym., 2021). Opettajan tulee kyetä seuraamaan jokaisen ryhmän työskentelyä, tukemaan sitä sekä kognitiivisesti että emotionaalisesti (Portaankorva-Koivisto ym., 2021), kytkemään työskentelyn aikana esille tulleita asioita toisiinsa ja reflektoimaan työskentelyä. (Schwarz ym., 2021).

Tässä avuksi voisivat tulla niin sanotut *kriittiset hetket* ja niiden havaitseminen. Tällaisia hetkiä ovat *työskentelyn tyhjäkäynti* tai *toimettomuus*, *aiheeseen liittymätön keskustelu*, *tekniset ongelmat*, *epäselvyydet tai muut tehtävästä nousevat haasteet* sekä *hämmennys* esimerkiksi ristiriitaisista ratkaisuehdotuksista. Tällaisissa vaiheissa ryhmän työskentely pysähtyy tai ajautuu sivuraiteille. Kriittisiä hetkiä ovat myös *oikean tai väärän ratkaisun löytyminen*, jolloin ryhmän työskentely luonnollisesti loppuu (Schwarz ym., 2021). Näissä tilanteissa opettajan kannattaa puuttua työskentelyyn ja siten edistää oppimista. Hän voi ohjatessaan opiskelijoita seurata heidän työskentelyään, tukea sitä *työtä edistävillä kysymyksillä*, vahvistaa ryhmän yhteenkuuluvuutta ja pysähtyä yhdessä ryhmän kanssa pohtimaan seuraavia askeleita. (Schwarz ym., 2021). Tällainen työskentely edellyttää sekä opettajalta että opiskelijoilta matematiikan kielentämistä, johon tartumme seuraavaksi.

5 Kielentäminen ja kielitietoinen opetus matematiikassa

Matematiikan kielestä puhuttaessa tarjoutuu tarkasteluun kolme erilaista lähtökohtaa: oppilaat, opettaja ja oppiaine. Ensinnäkin voidaan tarkastella *luokan monikielisyyttä* tai *oppilaiden kielen osaamista*. Toiseksi tarkastelun kohteena voi olla niin sanottu *opetuksen kieli* ja *opettajan osaamat kielet*. Kolmanneksi voidaan tarkastella *matematiikan kieltä*, sen kielellisiä piirteitä ja käytänteitä. (Planas ym., 2018). Tämän lisäksi kielen tutkimiselle on tyypillisesti kolme tarkastelukulmaa: *leksikaalinen*, *syntaktinen* ja *diskursiivinen* (Erath ym., 2021). Leksikaalisesta tarkastelusta puhutaan, kun kiinnitetään huomiota *sanastoon* ja *sanojen merkityksiin*. Syntaktinen tarkastelu keskittyy *kielioppiin* ja *sanojen tavutuksiin*. Diskursiivisuus ottaa tarkasteluun *vuorovaikutuksen rakenteet*, *rutiinit* ja *erityiset käytänteet,* kuten matematiikassa selittäminen, perusteleminen ja väitteleminen.

Kielentäminen ei suoranaisesti tule esille 21. vuosisadan taidoissa, mutta se on osa työskentelyn taitoja ja matemaattista ilmaisua. Jos matematiikan opetuksen tavoitteeksi asetetaan matemaattisen ajattelun kielentäminen ja kielitietoisuus, ne saavutetaan tutkimusten mukaan tutkivilla ja perustelemiseen suuntautuvilla opetusmenetelmillä (Erath ym., 2021). Näillä menetelmillä tuetaan merkityksellistä, käsitteellistä ja syvempää matematiikan oppimista. Oppitunnilla käytettävien tehtävien tulisi siis aktivoida keskusteluun. Miten opettajan tulisi tällöin toimia?

Kun opettaja päättää ryhtyä tukemaan kielentämistä ja matemaattista ilmaisua, hänen tulisi ensimmäiseksi valita tehtävä, joka tuottaa keskustelua. Tällaisia tehtäviä ovat esimerkiksi *vertailutehtävät* (Palkki, 2018; Palkki & Hästö, 2019) ja *virheelliset* *esimerkit* (Palkki, 2016), *avoimet ongelmatehtävät* (Portaankorva-Koivisto ym., 2021), *väittelytehtävät*, *tutkimustehtävät* ja *pelit*. Oppilaiden työskentelyn aikana opettajan tulisi aktiivisesti seurata oppilaiden keskustelua voidakseen valikoida ja ottaa myöhemmin yhteiseen pohdintaan keskusteluissa esille nousseita ideoita. On tärkeää, että opettaja kytkee oppilaiden esittämät ideat matematiikkaan ja tuo ne esille kaikille oppilaille ymmärrettävässä muodossa.

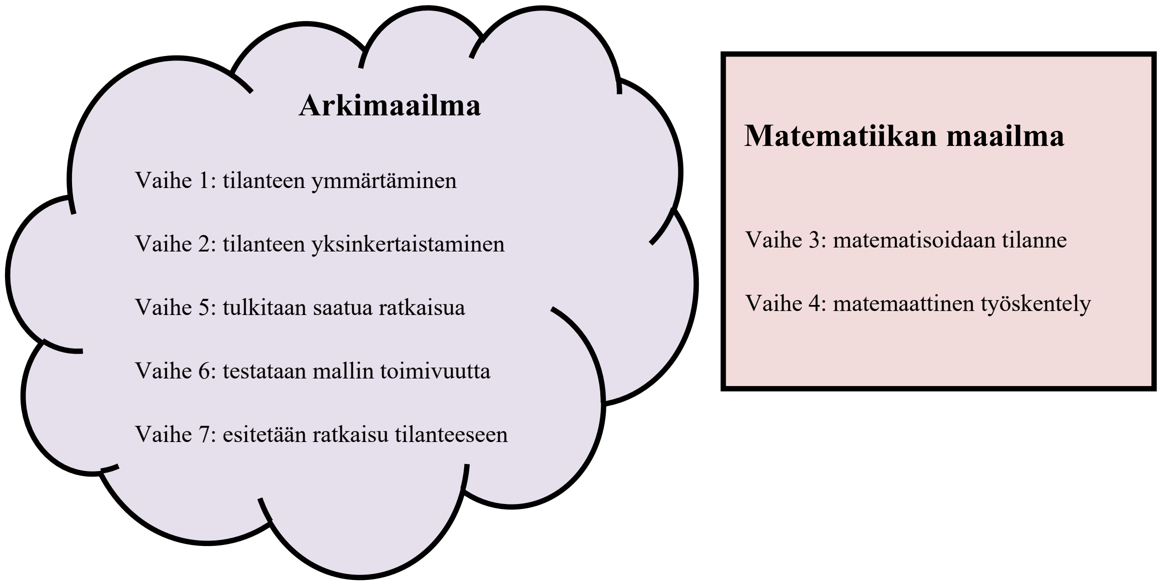
Joissakin tilanteissa on hyvä antaa oppilaiden itse korjata ilmaisuaan. Opettaja voi työskentelyn kuluessa virittää oppilaiden ajattelua pohtimista vaativilla kysymyksillä, mutta muuten pysytellä taustalla ja jättää varsinainen puhujan rooli oppilaille. Hyviä kysymyksiä ovat *mitä-kysymykset*, joilla voidaan jäsentää työn alla olevaa tehtävää. *Miksi-kysymykset* kehittävät käsitteellistä ymmärrystä ja *miten-kysymykset* menetelmällistä sujuvuutta. Opettaja voi myös tukea tai virittää keskustelua eleillä, piirroksilla ja muilla representaatioilla. Varsinkin, jos työskentely seisahtuu tai jauhaa paikoillaan. Samoin opettaja voi ottaa huomioon oppilaiden senhetkiset kielelliset ja matemaattiset taidot ja muotoilla ehdotuksia uudestaan, sanottaa ideoita matemaattisesti ja toistaa tarvittaessa.

Monikielisessä luokassa opettajan kannattaa mahdollisuuksien mukaan valita kieli, joka ilmentää matemaattista ongelmaa parhaiten, antaa käyttöön sanastoja tai synonyymejä, ja tukea kieliopillisesti oppilaiden ilmaisuja. Hyödyllistä on esimerkiksi tutkia sanoja, joilla on jokin kielellisesti yhteinen piirre. Tällaisia ovat vaikkapa sanat ”yhdenmuotoinen”, ”yhtenevä”, ”yhtä suuri” ja ”yhtälö”. (Erath ym., 2021.) Myös *synonyymien* tarkasteleminen on hyödyksi monikielisessä luokassa. Esimerkiksi tehtävissä voi esiintyä *suureita*, joita mitataan metreinä, mutta joita kuitenkin kuvataan erilaisilla sanoilla kuten ”pituus”, ”leveys”, ”korkeus”, ”syvyys”, ”paksuus”, ”välimatka” ja ”etäisyys”.

Kielentäminen voi tarkoittaa myös esimerkiksi arkielämään liittyvän sanallisessa muodossa esitetyn ongelman muuttamista matematiikan symbolikielelle. Tällöin kielentäminen on olennainen osa matemaattista ongelmanratkaisua. Seuraavaksi käsittelemmekin matemaattista mallintamista ja ongelmanratkaisua, jotka kuuluvat 21. vuosisadan ajattelun taitoihin.

6 Matemaattinen mallintaminen ja ongelmanratkaisu

Useissa maissa matematiikan opetussuunnitelmiin on kirjattu tavoite matematiikan kytkemisestä arjen ilmiöihin. Tällaisissa tehtävissä on usein kyse mallintamisesta ja kyvystä muokata ei-matemaattiselta vaikuttava arjen tilanne matematiikan kielelle. (Leiss ym., 2019). Matemaattisessa mallintamisessa on kyse seitsemästä vaiheesta, jotka voivat muodostaa lyhyitä syklejä eli kahden vaiheen välillä vaihdellaan ja muokataan syntyvää mallia paremmin toimivaksi (kuvio 2).

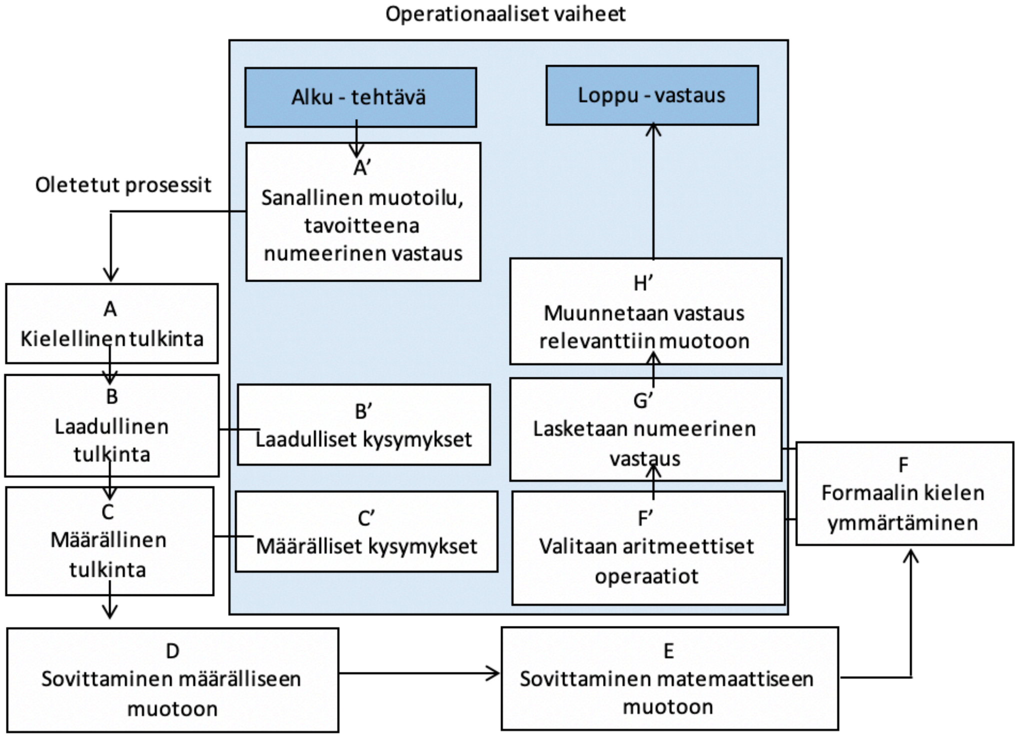


Kuvio 2. Matemaattisen mallintamisen vaiheet (Leiss ym., 2019)

Ensimmäisenä vaiheena on (1) tehtävässä esitetyn *tilanteen ymmärtäminen*. Tämä on se vaihe, joka usein edellyttää kielellistä osaamista ja aiheuttaa useimmat oppilaiden virheistä, mutta seuraavissa vaiheissakin voi vielä tapahtua virheitä. Ymmärtämisvaihetta seuraa (2) tehtävän *tilanteen yksinkertaistaminen* helpommin käsiteltävään muotoon. Nämä kaksi vaihetta ovat vielä vahvasti sidoksissa tehtävän kontekstiin, mutta tämän jälkeen siirrytään pois arkimaailmasta.

Vaiheessa (3) *matematisoidaan havaittu ongelma*. Matematisointivaihe ja sitä seuraava vaihe, jossa (4) *työskennellään matemaattisesti* ovat kontekstiin sitomattomia, mutta kun niiden tuloksena on lopulta saatu jokin ratkaisu, palataan takaisin itse tehtävän tilanteeseen ja (5) *tulkitaan saatua vastausta*. Lopulta, kun (6) *vastausta on testattu* ja havaittu sen toimivan tehtävän ratkaisuna, on vuorossa enää viimeinen vaihe, jossa (7) *esitetään tehtävän ratkaisu ja perustelut*. (Leiss ym., 2019.)

Pearla Nesher (1980) on kuvannut arkielämän ongelman ratkaisemista kaaviolla (kuvio 3), josta havaitaan mallintamisen kielelliset piirteet vielä paremmin.



Kuvio 3. Arkielämän ongelmatehtävän ratkaisuun liittyvät vaiheet ja prosessit (Nesher, 1980)

Useissa tutkimuksissa on havaittu, että matemaattinen mallintaminen matematiikan tunnilla on erilaista kuin mallintaminen arjessa. Pearla Nesher (1980) kertoo artikkelissaan tästä hyvän esimerkin. Hän esitti 5.-luokkalaisille oppilaille kysymyksen: ”Jos kannulliseen 60-asteista vettä lisätään yhtä suuri kannullinen 10-asteista vettä, mitä tapahtuu?” Oppilaat vastasivat tähän ”saadaan 70-asteista vettä”. Jos hän sen sijaan kysyi: ”Mitä tapahtuu, kun kuumaan veteen lisätään kylmää vettä?”, vastaus oli aina ”haaleaa vettä”. (Nesher, 1980.)

Oppilailla onkin taipumus tarkastella tehtäviä joko realistisesti tai epärealistisesti. Kirjassaan *Making Sense of Word Problems* Eric de Corte, Brian Greer, Lieven Verschaffel (2000) kertovat tehtäväsarjoista, joissa oppilaiden tuli ratkaista tehtäväpareja. Tehtäväpariin kuului sekä standardi matematiikan tehtävä että ongelmatehtävä. Esimerkkeinä seuraavaksi on kaksi heidän tehtäväpariaan:

- Standarditehtävä (Ystävät):

  Pete järjesti 10-vuotissyntymäpäiväjuhlat ja kutsui ystäviään juhlimaan. Hän kutsui juhliin 8 poikaa ja 4 tyttöä. Kuinka monta vierasta hänellä oli juhlissaan?

- Ongelmatehtävä (Ystävät):

  Karrilla on 5 ystävää ja Laurilla on 6 ystävää. He päättävät järjestää yhteiset juhlat ja kutsuvat kaikki ystävänsä. Kaikki tulivat paikalle. Kuinka monta vierasta juhlissa oli?

- Standarditehtävä (Lankut):

  Tiina osti 5 lankkua, jotka olivat 2 metrin mittaisia. Kuinka monta metrin mittaista palaa hän sai sahattua lankuista?

- Ongelmatehtävä (Lankut):

  Tiina osti 4 lankkua, jotka olivat 2,5 metrin mittaisia. Kuinka monta metrin mittaista palaa hän sai sahattua lankuista?

Tutkimuksissa selvitettiin, kuinka moni 10–11-vuotiaista oppilaista vastasi realistisesti ongelmatehtävään. Realistiseksi luokiteltiin vastaus, jossa vastaaja joko kirjoitti Ystävät-tehtävään, että ”ei voida tietää, kuinka monta vierasta juhlissa oli” tai Lankut-tehtävään esimerkiksi $4 \cdot 2 = 8$ tai ”10 palaa, mutta kahden liimaamisessa yhteen oli kova työ”. Ystävät-tehtävään realistisen vastauksen antoi 11 % vastaajista ja Lankut-tehtävään 14 % vastaajista. (de Corte ym., 2000.)

Matemaattisessa mallinnuksessa vaikuttavatkin kolmenlaiset tekijät: *tehtävään liittyvät tekijät*, *henkilökohtaiset tekijät* ja *prosessitekijät*. Tehtävään liittyviä tekijöitä ovat *tehtävän kieli*, *tehtävän konteksti* ja *sen tuttuus tai outous* ja *tehtävän kompleksisuus*. Tehtävä vaikeutuu, jos siinä on liikaa tai liian vähän informaatiota, jos se on avoin tai ratkaistavissa useilla tavoilla. Henkilökohtaisia tekijöitä taas ovat *matematiikan osaaminen*, *lukutaito* ja *luetun ymmärtäminen*. Prosessitekijöihin luetaan o*ngelmanratkaisustrategiat*, e*rilaiset ongelmatyypit ja niihin liittyvät vaikeudet*. (Leiss ym., 2019)

Ongelmanratkaisussa keskeistä on, että osallistujat osaavat tarttua toistensa ideoihin, jakaa aktiivisesti omia ideoitaan, ottaa huomioon ryhmän jäsenten vahvuudet ja myös heikkoudet, säädellä työskentelyään ja rakentaa yhdessä tietoa. Ongelmatehtävän ratkaisussa on havaittavissa kolmenlaisia strategioita: *työstämisen, toistamisen ja organisoinnin strategioita*. Näistä työstämisen strategiat liittyvät tehtävän kontekstiin ja siihen liittyvien kysymysten selvittelyyn. Tutkimuksissa on havaittu, että oppilaat esittävät itselleen useita tehtävän kontekstiin liittyviä kysymyksiä. Toistamisstrategioita ovat jonkin tekstin osan lukeminen uudestaan ja uudestaan, ja koko tehtävän lukeminen läpi useita kertoja. Yleensä oppilaille riittää lukea sittemmin vain pätkiä tehtävästä, kun se on jo pariin kertaan luettu kokonaisuudessaan läpi. Ratkaisun vaiheisiin kuuluu myös organisointistrategioita, kuten joidenkin tekstin kohtien yhteen vetämistä, alleviivausta ja muistiinpanojen tekemistä. Näistä muistiinpanot olivat tutkimuksissa keskeisimpiä. (Leiss ym., 2019.)

Kun halutaan lisätä vuorovaikutteisuutta ja ongelmanratkaisua osaksi matematiikan opiskelua, myös formatiiviseen arviointiin on kiinnitettävä huomiota. Formatiivisen arvioinnin on havaittu kehittävän juuri päättely- ja perustelutaitoja, joita *pisteittäisellä* tai *summatiivisella arvioinnilla* on vaikea kehittää. (Herbert ym., 2022). Myös formatiivinen arviointi on tärkeä teema LUMATIKKA-hankkeen kursseilla ja sen voidaan katsoa kehittävän 21. vuosisadan taidoista erityisesti elämäntaitoja. Seuraavaksi tarkastelemmekin vielä formatiivista arviointia päättelyn tukena.

7 Formatiivinen arviointi päättelyn tukena

Herbert ja kumppanit (2022) ehdottavat opettajan avuksi kehikkoa, joka tarkentaa *päättelyn muotoja* ja auttaa opettajaa havaitsemaan niitä oppilaiden työskentelyssä. Kun opettaja havaitsee päättelyyn viittaavia toimintoja, hänen on helpompi tarttua niihin ja kehittää niitä. Kehikossa onkin esitetty toiminnot syvenevässä järjestyksessä, jolloin opettaja voi koettaa ohjauksellaan siirtää oppilaitaan aina seuraaville tasoille.

Päättelytaidot voidaan jakaa kolmeen osataitoon *analysointi*, *yleistäminen* ja *perusteleminen*. Analysointia ovat *taito vertailla ja asettaa vastakkain*. Oppilaiden työskentelyssä nämä saattavat näkyä *samankaltaisuuksien havaitsemisena* ja yrityksinä luokitella tehtävän tietoja numeeristen tai visuaalisten ominaisuuksien perusteella, havaittujen kategorioiden järjestämisenä ja nimeämisenä, esimerkkien keksimisenä eri kategorioihin ja ennusteiden laatimisena. Nämä viimeiset toimet osoittavat jo erinomaisia analysointitaitoja. (Herbert ym., 2022.)

Yleistämistä kuvaavat *johtopäätelmien tekeminen*, *kyky siirtää havaittu ominaisuus tilanteesta toiseen*, *selittäminen, mitä tapahtuu*, ja *uuteen tilanteeseen sovittaminen*. Työskentelyn aikana nämä voivat näyttäytyä esimerkiksi oppilaan yrityksenä saada muut ryhmässä huomaamaan jokin ominaisuus tai sääntö ja kuvailla sitä sanoin, piirtäen, eleillä tai muilla visualisointikeinoilla. (Herbert ym., 2022.)

Tässä kohtaa on hyvä ottaa esille havainnollistaminen, joka tulee esille yläluokkien 7–9 kurssilla ja liittyy 21. vuosisadan taidoista työskentelyn taitoihin ja välineisiin. Havainnollisuutta tutkittaessa puhutaan tutkimuksissa usein visuaalisuudesta. *Visualisoinnilla* tarkoitetaankin juuri kykyä tuottaa, tulkita ja käyttää piirroksia, kuvia ja kaavioita joko mielessään, paperilla tai teknologisia apuvälineitä käyttäen (Presmeg, 2014). Oppitunnin kontekstissa visualisointia käyttävät sekä opettaja havainnollistaessaan opetustaan että oppilas, kun hän tukee esimerkiksi piirtämällä omaa matemaattista ajatteluaan ja ongelmanratkaisuaan. Molemmissa tapauksissa visualisointi tähtää ajatuksenvaihtoon, ideoiden kehittelyyn ja ymmärryksen lisääntymiseen.

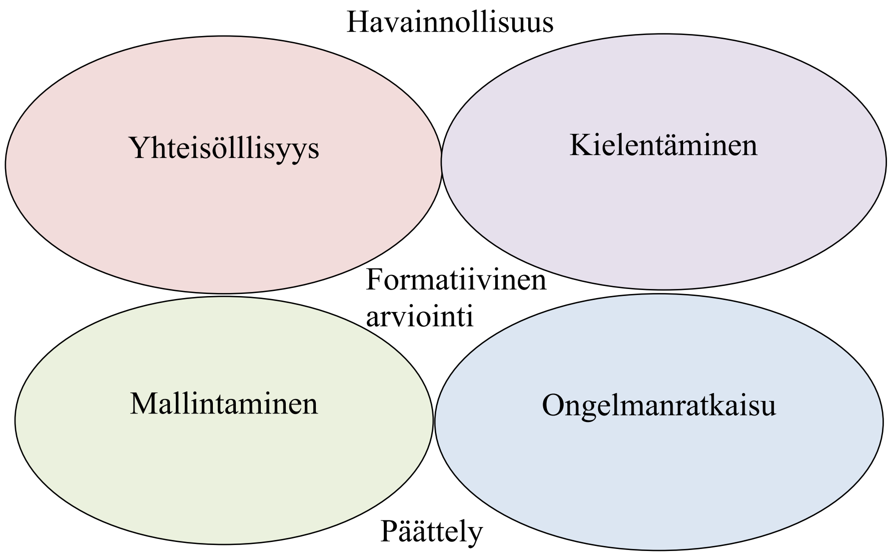
Tutkimuksissa on havaittu, että visualisoinnissa ei ole eroa eri sukupuolten välillä, mutta sen sijaan opettajien ja oppijoiden välillä on havaittavissa merkittävä ero. Oppijat tarvitsevat paljon enemmän visuaalista tukea kuin heidän matematiikan opettajansa (Presmeg, 2014). Tämä on tärkeä havainto, sillä opettajat kokiessaan havainnollistamisen omalta kohdaltaan tarpeettomaksi, jättävät sen käytön vähemmälle. Tutkijat ovat kuitenkin havainneet, että visualisointi parantaa huomattavasti oppilaiden matematiikassa suoriutumista (Gulsen Turgut & Turgut, 2018). Opettajan kannattaa siis käyttää havainnollistamista opetuksessaan ja kannustaa oppilaitaankin hyödyntämään sitä opiskelussaan.

Päätellessään matemaattisesti oppilaat kuitenkin siirtyvät visualisoinnista seuraaviin muotoihin. Usein oppilas, joka on kyennyt havaitsemaan jonkin yleistettävän ominaisuuden tehtävästä, ja jolla on hyvät matemaattiset taidot, pyrkii myös esittämään sitä symbolien, lausekkeiden tai kaavan avulla ja selittämään, mitä hän näillä tarkoittaa. Hän saattaa myös soveltaa sääntöä löytääkseen uusia esimerkkejä ja muokata sääntöä toimivampaan suuntaan. (Herbert ym., 2022.)

Perustelemiseen liittyviä taitoja ovat *looginen ajattelu*, *selittäminen miksi*, *todistaminen*, *arvioiminen* ja *loogiseen lopputulokseen pääseminen*. Perustelemisen taidot tulevat näkyviin oppitunnin työskentelemisessä silloin, kun oppilas kertoo, mitä tehtiin ja pyrkii selittämään, miksi saatu ratkaisu on oikein. Edistyneempiä perustelemisen taitoja osoittaa, kun oppilas pyrkii osoittamaan testaamalla, että saatu ratkaisu toimii, osaa havaita ja korjata virheitä tai epäjohdonmukaisuuksia, kykenee perustelemaan päätelmiään nojaten sääntöön tai vastaesimerkkiin, käyttää loogisia argumentteja perustelemisensa tukena ja ehkä vaativimpana kaikista osaa perustella aukottomasti, että väite on tosi ja pätee kaikissa tilanteissa. (Herbert ym., 2022.) Analysointi, yleistäminen ja perusteleminen linkittyvät lopulta kaikkiin niihin taitoihin, joita olemme kuvanneet ja joiden kehittämistä pitäneet tärkeänä.

8 Pohdinta

LUMATIKKA-hanketta suunniteltaessa halusimme rakentaa 7.–9.-luokkien ja lukion matematiikan opettajille kursseja, jotka vastaavat sekä opetussuunnitelmien haasteisiin että 21. vuosisadan taitojen huomioimiseen opetuksessa. Halusimme niiden tukevan viimeisimmän tutkimustiedon näkemystä hyvästä matematiikan opetuksesta. Artikkelissa esittelimme syitä, miksi juuri tietyt teemat valittiin mukaan (ks. kuvio 4).



Kuvio 4. LUMATIKKA-koulutuksen yläkoulun 7–9 luokkien ja lukion osioiden keskeiset sisällöt

Yhteisöllisyys, kielentäminen, mallintaminen ja ongelmanratkaisu, sekä näiden rinnalla formatiivinen arviointi, päättely ja havainnollisuus, ovat matematiikan opetuksen perusta, joka vastaa opettajien tarpeisiin, herättelee jo tuttuja teemoja uudella tavalla, syventää näkökulmia, havahduttaa pohtimaan ja ylipäätään nostaa keskustelua matematiikan oppimisesta, opetuksesta ja opiskelusta. Yhdessä nämä muodostavat kokonaiskuvan siitä, mitä matematiikan opetuksessa tällä hetkellä tavoitellaan. Näistä lähtökohdista LUMATIKKA-kurssit tarjoavat tukea opettajille oman opetuksen kehittämiseen.

Lähteet

Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. Teoksessa P. E. Griffin, B. McGaw, & E. Care (toim.), *Assessment and Teaching of 21st Century Skills* (s. 17–66). Springer.

Björn, P. M., Äikäs, A., Hakkarainen, A., Kyttälä, M., & Fuchs, L. S. (2019). Accelerating mathematics word problem-solving performance and efficacy with think-aloud strategies. *South African Journal of Childhood Education*, *9*(1). https://doi.org/10.4102/sajce.v9i1.716

de Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.
Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(2), 245–262. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2
Gulsen Turgut, İ., & Turgut, S. (2018). The Effects of Visualization on Mathematics Achievement in Reference to Thesis Studies Conducted in Turkey: A Meta-Analysis. *Universal Journal of Educational Research*, *6*(5), 1094–1106. https://doi.org/10.13189/ujer.2018.060531
Herbert, S., Vale, C., White, P., & Bragg, L. A. (2022). Engagement with a formative assessment rubric: A case of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, *111*, 101899. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101899
Häkkinen, P., Järvelä, S., Mäkitalo-Siegl, K., Ahonen, A., Näykki, P., & Valtonen, T. (2017). Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP 21): A framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills. *Teachers and Teaching*, *23*(1), 25–41. https://doi.org/10.1080/13540602.2016.1203772
Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and Mathematics—Key Factors influencing the Comprehension Process in reality-based Tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 131–153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835
Miettinen, R. (2019). 21. Vuosisadan kompetenssit – OECD kasvatuksen uudistajana. *Kasvatus*, *50*(3), 203–215.
Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the learning of mathematics*, *1*(1), 41–48.
OECD. (2005). *Definition and selection of key competencies: Executive summary*. OECD. http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf
Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/6328/1688825037.pdf?sequence=1
Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
Palkki, R. (2016). Virheellinen esimerkki matematiikan luokkahuonekeskustelussa. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö (Toim.), *Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 2015* (s. 111–121). Finnish Mathematics and Science Education Research Association.
Palkki, R. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. *LUMAT General Issue*, *6*(1), 105–128.
Palkki, R., & Hästö, P. (2019). Mathematics teachers' reasons to use (or not) intentional errors. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *16*, 263–282.
Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. Teoksessa T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (toim.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (s. 196–210). Routledge.
Portaankorva-Koivisto, P. M., Laine, A. T., & Ahtee, M. (2021). Two Primary Teachers Developing their Teaching Problem-solving during Three-year In-service Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(1). https://doi.org/10.29333/iejme/9617
Presmeg, N. (2014). Visualization and Learning in Mathematics Education. Teoksessa S. Lerman (toim.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 636–640). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_161
Schwarz, B. B., Swidan, O., Prusak, N., & Palatnik, A. (2021). Collaborative learning in mathematics classrooms: Can teachers understand progress of concurrent collaborating groups? *Computers & Education*, *165*, 104151. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2021.104151

Algoritmit yläkoulussa: miksi ja miten opettaa niitä matematiikan tunneilla?

Veera Lupunen

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

Tiivistelmä: Tässä artikkelissa tarkastellaan algoritmin käsitettä sekä sitä, miten algoritmeja voidaan opettaa yläkoulussa. Algoritmit ovat osista koostuvia toimintaohjeita, joilla on tiettyjä ominaisuuksia kuten päättyvyys ja tuloksellisuus. Algoritminen ajattelu puolestaan on ajatusprosessi, jossa tarkoituksena on löytää ratkaisu johonkin laskennalliseen, algoritmin avulla ratkaistavaan ongelmaan. Algoritmit on mahdollista toteuttaa tietokoneella ohjelmoimalla. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa opetuksen tavoitteiksi määritellään toisaalta algoritmisen ajattelun taitojen kehittäminen ja toisaalta ohjelmointitaidon saavuttaminen. LUMATIKKA-kurssilla *Algoritmisen ajattelun kehittäminen* pyritään tukemaan opettajia näiden aiheiden opettamisessa sekä tutustutaan algoritmeihin ja saadaan konkreettisia ideoita niiden opetukseen. Algoritmeihin tutustumalla voi kehittää algoritmisen ajattelun taitoja, minkä lisäksi niiden tunteminen on osa yleissivistystä. Algoritmien opetus yläkoulussa tukeekin monien matematiikan opetuksen tavoitteiden saavuttamista.

Asiasanat: algoritmit, algoritminen ajattelu, ohjelmointi, yläkoulu

Yhteystiedot: veera.lupunen@helsinki.fi

1 Algoritmit ympärillämme

Algoritmeja on kaikkialla ympärillämme. Ne avaavat älypuhelimiemme lukituksen kasvojamme tarkastelemalla, ehdottavat suoratoistopalveluissa katsottavaa ja kuunneltavaa, arvioivat lainanmaksukykyämme sekä etsivät ystävän vinkkaaman kahvilan yhteystiedot netistä, vaikka kahvilan nimen oikeinkirjoitus olisikin sinnepäin. Ne myös ohjaavat meidät oikeaan paikkaan, kuljimmepa jalan, polkupyörällä tai bussilla. Vaikka erilaisia algoritmeja on kaikkialla, me emme tavallisesti näe niitä. Ne ohjaavat elämäämme ja valintojamme, mutta emme aina tiedä tarkalleen, miten. Algoritmeista on yhteiskunnassamme tullut elintärkeitä, sillä niiden avulla ohjataan niin tehtaita kuin maatalouttakin, niin tietoliikennejärjestelmiä kuin sähköntuotantoakin.

Tässä artikkelissa pohditaan algoritmeja osana perusopetusta. Tulisiko niitä opettaa ja jos kyllä, niin miten? Artikkelissa tutustutaan ensin algoritmin ja algoritmisen ajattelun käsitteisiin, annetaan konkreettisia esimerkkejä erilaisista algoritmeista sekä valotetaan algoritmien ja ohjelmoinnin suhdetta. Tämän jälkeen luodaan katsaus perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin: mitä perusteissa sanotaan algoritmeista, algoritmisesta ajattelusta ja ohjelmoinnista? Lisäksi kuvataan, miten LUMATIKKA-täydennyskoulutuksen kurssi *Algoritmisen ajattelun kehittäminen* on omalta osaltaan pyrkinyt vastaamaan edellä esitettyihin kysymyksiin ja miten se tukee opettajien valmiuksia näiden aiheiden opettamiseen. Lopuksi pohditaan algoritmien opettamista koulussa opetussuunnitelman perusteiden asettamissa raameissa ja annetaan pedagogisia ideoita algoritmien opettamiseen.

Algoritmien tuntemus on osa tämän päivän yleissivistystä, ja kaikille yhteisen perusopetuksen tehtävänä on tarjota elämässä tarvittavat tiedot oppivelvollisille. Artikkelissa algoritmeihin liittyvän opetuksen tarkastelu on rajattu yläkouluun (perusopetuksen vuosiluokat 7–9) keskittyen, vaikka kurssi *Algoritminen ajattelun kehittäminen* onkin suunnattu opettajille varhaiskasvatuksesta toiselle asteelle. Myös artikkelin esimerkit ja pedagogiset vinkit on pyritty valitsemaan yläkoulukontekstiin sopivaksi.

2 Algoritmit ja algoritminen ajattelu

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) asettaa opetuksen yhdeksi tavoitteeksi oppilaiden algoritmisen ajattelun kehittämisen tukemisen (Opetushallitus, 2014, s. 375). Sanapari ”algoritminen ajattelu” koostuu kahdesta sanasta: ”algoritmi” ja ”ajattelu”. Seuraavassa tarkastellaan näistä monelle vieraampaa käsitettä, *algoritmia*. Tämän artikkelin näkökulma on nimenomaan algoritmeissa, joten jälkimmäiseen käsitteeseen, ajatteluun, luotava katsaus on lyhyempi.

2.1 Mitä ovat algoritmit?

Käsite *algoritmi* on monelle tuttu uutisotsikoista ja sitä käytetään arkipuheessa vaivatta: algoritmit tunnistavat kasvomme ja päättävät, mitä uutisia näemme. Kuitenkin, kuten usein tämänkaltaisten käsitteiden kohdalla on, algoritmin käsite pakenee määritelmiä, eikä tiedemaailmassa ole konsensusta sen täsmällisestä määritelmästä. Etymologiasta ei juuri ole apua: algoritmi-sanan kerrotaan juontuvan 700–800-luvuilla eläneen matemaatikon Muḥmmad ibn Mūsā al-Khwārizmīnin nimestä. Algoritmi-sanalla viitattiin hänen kehittämäänsä laskuoppiin (Knuth, 1973, s. 1).

Algoritmin käsitteestä voidaan kuitenkin sanoa ainakin seuraavaa: algoritmi on osista koostuva toimintaohje, joka toteuttamalla voidaan ratkaista jokin ongelma. Mainitut osat ovat täsmällisesti määriteltyjä, ne tulee toteuttaa tietyssä järjestyksessä ja niitä on äärellinen, etukäteen laskettavissa oleva määrä. Kaikkiin ongelmiin ei ole olemassa tai tiedossa ratkaisun tarjoavaa algoritmia, mutta kaikki algoritmit ratkaisevat jonkin ongelman. Samaan ongelmaan voi olla olemassa myös useita algoritmeja. (Knuth, 1973, s. 4; Ukkonen, 2003, s.19; Sipser, 2006, s. 156–157; Cormen ym. 2009, s. 5; Laaksonen & Lupunen, 2021, s.72)

Algoritmi-käsite liitetään tyypillisesti ohjelmointiin, mutta algoritmeista kuulee puhuttavan myös varsin laveasti ja käsitteellä tarkoitettavan mitä tahansa toimintaohjetta, vaatteiden päälle pukemisesta huonekalujen kokoamisohjeisiin ja leivontaresepteihin. (vrt. esim. Sipser, 2006, s. 156; Knuth, 1973, s. 4) Lisäksi algoritmeja esiintyy myös matematiikassa, jossa puhutaan esimerkiksi *kertolaskualgoritmista* (Opetushallitus, 2014, s. 235) tai kahden luvun suurimman yhteisen tekijän löytävästä algoritmista (*Eukleideen algoritmi*) (Sipser, 2006, s. 156; Knuth 1973, s. 2–4).

Jotta ongelma voidaan ratkaista tietokoneen avulla, algoritmin jokainen askel tulee voida ratkaista laskemalla. Tietokoneella ratkaistavan ongelman tulee siis olla *laskennallinen* – sellainen, että sen voi palauttaa tiettyihin matemaattisiin laskutoimituksiin. (Cormen ym., 2009, s. 5) Tällaisia laskutoimituksia ovat esimerkiksi *yhteenlasku*, *kertolasku*, *kokonaisjako* sekä *vertailuoperaatiot* pienempi kuin (<), suurempi kuin (>) ja yhtä suuri kuin (=). (Cormen ym. 2009, s. 23–24) Laskutoimituksia yhdistämällä, toistamalla ja suorittamalla tietyssä järjestyksessä voidaan ratkaista hyvinkin monimutkaisia ongelmia.

Tietokoneelle tarkoitettuja algoritmeja voidaan luokitella käyttötarkoituksen mukaan. Samantyyppisiä algoritmeja voi olla useita, joista jokainen hieman eri käyttötarkoitukseen kehitetty tai edellistä tehokkaampi. Niiden avulla voidaan saada ratkaisuja ongelmiin, kuten ”Mikä on lyhin reitti kaupungista A kaupunkiin B, kun tunnetaan kaikki näiden kahden kaupungin välissä olevat kaupungit ja niiden väliset reitit (*reitinhakualgoritmit*)?”, ”Mihin ruutuun ristinolla-pelissä kannattaa tietyssä pelitilanteessa piirtää oma merkki, jotta voitto olisi taattu (*minimax-algoritmi*)?” tai ”Miten salaiseksi tarkoitettu viesti voidaan suojata niin, ettei kukaan muu kuin viestin tarkoitettu vastaanottaja pysty ymmärtämään sitä (*salausalgoritmit*)?”

2.2 Algoritmit – leivontareseptejä tietokoneelle

Tässä artikkelissa algoritmit ymmärretään erityisesti tietokoneilla ohjelmointiin tarkoitetuiksi toimintaohjeiksi. Algoritmien ymmärtämistä auttaa kuitenkin niiden vertaaminen muunlaisiin toimintaohjeisiin. Eräs hyvä verrokki on leivontaresepti, joka antaa tarkat ohjeet siihen, miten saadaan aikaiseksi herkullisia leivonnaisia. Leivontaresepti ratkaisee herkullisen leivonnaisen aikaansaamisen ongelman.

Leivontareseptejä tai muita arkipäivän toimintaohjeita ei kuitenkaan tavallisesti kutsuta algoritmeiksi. Tarkastellaan seuraavaksi algoritmin ominaisuuksia vielä hieman tarkemmin ja pohditaan, miten ja miltä osin leivontareseptiesimerkki sopii yhteen niiden kanssa. Tarkastelussa on hyödynnetty algoritmiikan suurmiehen, tietojenkäsittelytieteen emeritusprofessorin Donald Knuthin viisikohtaista kuvausta algoritmien ominaisuuksista. Myös Knuth pohtii reseptien ja algoritmien suhdetta. (Knuth, 1973, s. 4–9)

Ensinnäkin algoritmi on *päättyvä*. Sen jokainen osa toistetaan enintään äärellinen määrä kertoja, minkä jälkeen sen suoritus pysähtyy. Algoritmin suoritus ei siis kestä loputtomasti, vaan viimeistään hyvin pitkän ajan kuluttua se päättyy. (Knuth, 1973, s. 4–5) Päättyvyys pätee myös leivontareseptiin: vaikka olisi kyse kuinka monimutkaisesta ja aikaa vievästä leivonnaisesta tahansa, sen tekeminen päättyy lopulta ja leivonnainen on valmis.

Toiseksi algoritmin jokainen askel on tarkasti *määritelty*. Askeleiden suorittamisen tapa ei siis voi olla tulkinnanvaraista tai epäselvää, vaan ohjeen tulee olla riittävän yksityiskohtainen ja täsmällinen, että algoritmin suorittaminen johtaa aina samaan, oikeaan ratkaisuun. (Knuth, 1973, s. 5) Kotileipojille suunnatut reseptit saattavat hyvinkin olla varsin epätäsmällisiä ja vaatia ihmiseltä tulkintaa ja ennakkotietoja. Reseptissä voidaan esimerkiksi todeta, että kananmunat vaahdotetaan sokerin kanssa ja olettaa leipojan ymmärtävän, että munista käytetään vain pehmeä aines, eikä niitä yhdistetä sokerin kanssa kuorineen. Tässä suhteessa leivontareseptit tyypillisesti poikkeavat algoritmin määritelmästä.

Kolmanneksi algoritmille voidaan antaa ratkaistavaa tapausta kuvaava *syöte*, joka voi algoritmista riippuen olla esimerkiksi luku tai lukuja, sana tai sanoja tai lista lukuja. (Knuth, 1973, s. 5; Cormen ym., 2009, s. 5) Leivontaesimerkissä syötteen voi ajatella olevan raaka-aineet ja leivontavälineet, joita leivonnaisen aikaan saamiseksi tarvitaan: tyypillisesti näitä ovat esimerkiksi jauhot, kohotusaineet, kulhot ja vispilät.

Neljänneksi, kun algoritmin suoritus päättyy, saadaan *tulos*, joka kertoo ongelman ratkaisun kyseisessä tapauksessa eli annetulla syötteellä. Tulos voi syötteen tapaan olla algoritmista riippuen monenlaisia asioita, kokonaisluvuista kuviin. (Knuth, 1973, s. 5; Cormen ym., 2009, s. 5) Leivontareseptin päättyessä tuloksena on tyypillisesti leivonnainen – ainakin jos syötteenä on saatu kaikki tarvittavat aineet ja välineet, ja ohjetta on noudatettu.

Viidenneksi algoritmi on *tuloksellinen* eli sen ratkaisu on mahdollista saavuttaa. Knuthin käyttämä englannin kielen sana *effectiveness* on tässä hieman hankalasti suomennettava, mutta jokin sarja ohjeita on algoritmi vain, jos sen jokaiseen osaan on olemassa algoritminen ratkaisu. Lisäksi jokaisen näistä osista tulee olla suoritettavissa äärellisessä ajassa. (Knuth, 1973, s. 6) Algoritmin osana ei siis voi olla esimerkiksi jokin ratkeamattomaksi osoitettu ongelma, kuten pysähtymisongelma: pysähtyykö minkä tahansa ohjelman suoritus aina kaikilla syötteillä (Sipser 2006, s. 175–185). Algoritmin osana ei voi myöskään olla esimerkiksi eettinen ongelma, kuten ”onko varastaminen oikein”, sillä eettisiä ongelmia ei voida ratkaista algoritmisesti.

Lisäksi on huomattava, että vaikka algoritmin toteuttaisikin tietokoneohjelmana, saman asian voi aina tehdä myös käsin, kynän ja paperin avulla. (Knuth, 1973, s. 6) Ratkaistavasta ongelmasta riippuen aikaa, kyniä ja paperia voisi kuitenkin kulua hyvin paljon, minkä vuoksi algoritmin toteuttaminen tietokoneella on tyypillisesti hyödyllistä. Paljon aikaa voi tarkoittaa tuhansia tai satoja tuhansia vuosia. Tehokkaalta tietokoneelta saman asian tekemiseen voi mennä huomattavasti vähemmän aikaa, esimerkiksi joitakin minuutteja. (ks. esim. Ukkonen, 2003, s. 20) Tietokoneet eivät myöskään tee huolimattomuusvirheitä, toisin kuin ihmiset. Oikean vastauksen saaminen tosin edellyttää sitä, ettei ihminen ole algoritmia tietokoneelle toteuttaessaan tehnyt ohjelmointivirheitä.

Leivontareseptin lisäksi toinen algoritmin käsitettä havainnollistava esimerkki on peräisin klassikkoteoksesta Linnunradan käsikirja liftareille. Kirjasarjan ensimmäisessä osassa supertietokone Syvä Miete saa tehtävän: sen tulee selvittää *Vastaus elämään, kaikkeuteen ja kaikkeen sellaiseen* (Adams, 1981, s. 161). Epäselväksi jää, mikä tässä on täsmällinen syöte. Vuosimiljoonien laskemisen jälkeen vastaukseksi saadaan tulos ”42”. Jos syöte olikin epämääräinen, tulos on sitäkin eksaktimpi, vaikkakin kontekstissaan käsittämätön. Tarina jatkuu niin, että tietokoneen seuraavaksi tehtäväksi annetaan selvittää se tarkka kysymys, johon 42 on vastaus – eli siis määriteltävä ratkaistava ongelma ja täsmällinen syöte. Kysymys ei kirjasarjan aikana ehdi selvitä.

2.3 Algoritminen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Kuten edellä kerrottiin, algoritmi on osista koostuva ratkaisu johonkin ongelmaan. Ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen on yksi matematiikan opetuksen tavoitteita perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa. (Opetushallitus, 2014, s. 17, 374) Sen sijaan perusteissa ei opetuksen tavoitteeksi aseteta esimerkiksi algoritmin käsitteen opettamista tai erilaisiin algoritmeihin tutustumista. Algoritmin käsitteen tunteminen sekä erilaiset algoritmit kuitenkin liittyvät algoritmisen ajattelun kehittämiseen (Yadav ym., 2017, s. 57).

Algoritminen ajattelu on perustavanlaatuinen ajattelun taito ja ajatusprosessi, johon liittyy kiinteästi ajatus ongelmien ratkaisemisesta. (Wing, 2006, s. 33; Selby & Woollard, 2013) Algoritmisessa ajattelussa ongelmia pyritään ratkaisemaan nimenomaan algoritmisesti. Ratkaistavien ongelmien tulee siis olla ratkaistavissa laskennallisesti, kuten todettua. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että ongelmat tulisi ratkaista ohjelmoimalla, vaan laskennan voi hyvin tehdä myös ihminen. (Wing, 2006, s. 33)

Algoritmisen ajattelun taitoon kuuluu kyky ajatella abstraktisti sekä ongelman pilkkominen pieniin, ratkaistavissa oleviin osatekijöihin, jotka kootaan yhteen lopulliseksi ratkaisuksi. Tärkeää on kyky arvioida ratkaisua ja tarvittaessa korjata sitä. Algoritmiseen ajatteluun kuuluu myös olemassa olevien ratkaisujen yleistäminen: miten tiettyä tarkoitusta varten luotua ratkaisua voidaan käyttää muiden ongelmien ratkaisuun? (Selby & Woollard, 2013)

Algoritminen ajattelu liittyy ohjelmointiin ja algoritmeihin, mutta ei rajoitu niihin. Taitoa ratkaista ongelmia ja laatia vaiheittaisia ohjeita tarvitaan monessa muussakin yhteydessä. Se ei ole tietokoneen kaltaisesti ajattelua, vaan ongelmien ratkaisua luovasti, tehokasta ja riittävän tarkkaa ratkaisua etsien. Ratkaisussa voidaan käyttää sellaisia tietojenkäsittelytieteellisiä keinoja kuin toistaminen rekursiivisesti ja toimintojen rinnakkaistus. (Wing, 2006, s. 35)

Algoritmisen ajattelun harjoittelu on yksi keino kehittää ongelmanratkaisutaitoa (Yadav ym., 2017, s. 57–59). Algoritmin käsitteen tunteminen tarjoaa mallin siihen, miten ongelman voi ratkaista pilkkomalla sen pieniin osiin, joihin on olemassa ja tiedossa ratkaisu. Erilaisten algoritmien tunteminen taas tarjoaa esimerkkejä ratkaisutavoista, joita oppilas voi hyödyntää vastaan tulevien ongelmien ratkaisussa. Jos oppilas tuntee algoritmin, jonka avulla voidaan etsiä kaikki mahdolliset reitit kaupungista A kaupunkiin B, hän voi hyödyntää tätä algoritmia tilanteessa, jossa tulee etsiä lyhin mahdollinen reitti kaupunkien A ja B välillä. Näin ratkaistava ongelma voidaan palauttaa ongelmaan, johon tunnetaan jo ratkaisu.

3 Algoritmit ja ohjelmointi

Jotta tietokone voi ratkaista ongelman jonkin algoritmin mukaisesti, algoritmi pitää toteuttaa jollakin *ohjelmointikielellä*. Eräitä ohjelmointikieliä ovat Python, Java ja Scratch. Edellä esitetty fiktiivinen supertietokone Syvä Miete havainnollistaa asiaa. Syötteen (epämääräinen pyyntö Vastauksesta) ja tuloksen (42) väliin voi kuvitella ongelman ratkaisevan algoritmin. Syvä Miete on tietokone, ja sen ”sisällä” on *algoritmin mukaan tehty tietokoneohjelma*. Algoritmi itsessään on abstraktio, jonka perusteella voidaan laatia algoritmin *toteuttava* tietokoneohjelma. Algoritmin voi kuvata esimerkiksi sanallisesti kertomalla vaihe vaiheelta, mitä ongelman ratkaisemiseksi tulee tehdä.

Algoritmit voidaan siis toteuttaa ohjelmointikielellä eli kirjoittaa jollakin ihmisten kehittämällä ohjelmointikielellä tietokoneen ymmärtämään muotoon. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet asettavat algoritmisen ajattelun yhteydessä opetuksen tavoitteeksi myös *ohjelmointiin* liittyvät taidot (Opetushallitus, 2014, s. 375). Seuraavassa esitellään eräs algoritmi ja havainnollistetaan samalla sen ja ohjelmoinnin välistä suhdetta.

Määritellään ongelmaksi seuraava kysymys: ”Mitä tarkoittaa suomen kielen sana *vadelma*?” Oletetaan, että käytössämme on sanakirja, josta kyseinen sanan selitys löytyy. Tässä tilanteessa algoritmin syöte on siis sana vadelma ja tulos on sanaselitys, vaikkapa *mehukas ja hyvänmakuinen luumarja, tyypillisesti punainen*. Ongelma voidaan ratkaista käyttämällä jotakin hakualgoritmia, esimerkiksi *binäärihakua*. Nimen ei kannata antaa hämätä – se ei sinänsä liity mitenkään binäärilukuihin.

Binäärihakua voidaan käyttää, mikäli etsittävät asiat ovat jossakin sopivassa järjestyksessä toisiinsa nähden. Sanakirjassa sanat on yleensä järjestetty aakkosjärjestykseen. Binäärihaku on tehokas tapa etsiä jokin tietty tieto, joka on tallennettu johonkin *tietorakenteeseen*. Tietorakenne on tapa säilyttää tietoa; tässä se on sanakirja, joka koostuu peräkkäin liitetyistä sivuista, joilla on sivunumero. Sivut muodostavat aukeamia, joilla on sanoja selityksineen.

Algoritmin toiminnan voisi kuvata sanallisesti vaikkapa seuraavasti:

1. Avaa sanakirja keskikohdasta.
2. Jos etsitty sana on avatulla aukeamalla, lue sen selitys ja pysähdy.
3. Jos sana ei ole avatulla aukeamalla, tutki, onko sana aakkosissa ennen kyseisellä aukeamalla olevia sanoja vai niiden jälkeen. Ota se puoli sanakirjaa, jolla sana on. Tästä alkaen tutkitaan vain tätä osaa sanakirjasta. Unohda toinen puoli.
4. Toista kohtia 1.–3. kunnes löydät aukeaman, jolla etsimäsi sana on.

Tämän algoritmin sanallisen kuvauksen perusteella ihminen voi laatia algoritmista ohjelmatoteutuksen tietokoneelle. Pythonilla binäärihakualgoritmin toteutus voisi näyttää esimerkiksi seuraavalta:

```
sanakirja = [("kissa", "lemmikkinä pidetty pe-
toeläin"),("pulla", "makea leivonnainen"),("tuoli", "huo-
nekalu, jolla voi istua")]

sana = "kynä"

a = 0
b = len(sanakirja)-1

while a <= b:
    k = (a+b)//2
    if sanakirja[k][0] == sana:
        print(sanakirja[k][1])
        break

    if sana < sanakirja[k][0]:
        b = k-1
    else:
        a = k+1
```

Python-ohjelmaa voi halutessaan kokeilla itse joko omalla tietokoneella, jolle on asennettu Python, tai esimerkiksi LUMATIKKA-ohjelman ohjelmointikursseillakin käytössä olevan Tie koodariksi -sivuston editorissa.

Vähemmän tehokas tapa etsiä sana sanakirjasta olisi aloittaa kirjan alusta ja käydä sitä läpi sivu sivulta, kunnes oikea sana löytyy. Tämä veisi kuitenkin huomattavasti enemmän aikaa kuin etsiminen binäärihakua käyttämällä. Binäärihaku onkin tehokas tapa hakea tietoa silloin, kun se on järjestetty sopivalla tavalla, esimerkiksi aakkosjärjestykseen.

Työkseen ohjelmoivan eteen tulee melko harvoin tilanne, jossa algoritmin ohjelmatoteutus pitäisi toteuttaa itse alusta alkaen samaan tapaan kuin edellä esitetyssä esimerkissä on tehty. Algoritmeja sen sijaan tarvitaan ja käytetään jatkuvasti, mutta mikäli kyse on yleisestä algoritmista ja yleisesti käytetystä ohjelmointikielestä, joku toinen ohjelmoija on todennäköisesti jo tehnyt algoritmin *ohjelmatoteutuksen* kyseiselle kielelle ja laittanut sen muiden saataville. Tällöin puhutaan *kirjastokoodista* eli koodista, jonka joku toinen on tehnyt, ja jota voi käyttää oman koodinsa osana.

Edellisessä esimerkissä vaikkapa komento *print* (tulosta) on tällaista koodia. Komento kuuluu Pythonin peruskirjastoon ja sitä käyttämällä ei tarvitse määritellä tulostusta itse alusta alkaen. Järjestämisalgoritmit ovat hyvä esimerkki algoritmeista, joita käytetään usein, mutta joista kannattaa harvoin tehdä oma ohjelmatoteutus itse. Eri algoritmien, algoritmityyppien sekä ominaisuuksien tunteminen on tarpeen, jotta ohjelmoija osaa valita ohjelmaansa parhaiten sopivan algoritmin. Toisaalta algoritmien kehityksessä ja tutkimuksessa ohjelmatoteutuksen osaaminen on hyvin olennaista.

4 Algoritmit perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Kun perusopetuksen opetussuunnitelman uusia perusteita laadittiin 2010-luvun alussa, Suomesta puhuttiin monessa yhteydessä teknologian edelläkävijämaana; olivathan esimerkiksi puhelinyhtiö Nokia ja mobiilipeli Angry Birds saavuttaneet maailmalla hurjan tunnettuuden. Samaan aikaan tietokoneisiin liittyvän opetuksen kerrottiin olevan olematonta moneen muuhun, kuten naapurimaa Viroon, verrattuna (Malmberg, 16.10.2013). Uutisotsikot kertoivat niin koodaripulasta (Lappalainen, 13.4.2011) kuin siitäkin, että jo pienet lapset voisivat oppia ohjelmointia (Koistinen, 23.11.2013).

Vuoden 2014 alussa kerrottiin, että myös Suomen peruskouluissa aloitettaisiin uuden opetussuunnitelman myötä ohjelmoinnin opetus (Lehtinen, 21.1.2014). Perusteet otettiin käyttöön asteittain, ja tällä hetkellä ohjelmointia opetetaan kaikilla peruskoulun luokka-asteilla. Opetussuunnitelman perusteet asettavat opetukselle tavoitteet, sisällöt ja arvioinnin kriteerit. Seuraavaksi opetussuunnitelman perusteita tarkastellaan yläkoulun algoritmeihin ja ohjelmointiin liittyvän sisällön osalta.

4.1 Algoritmit, ohjelmointi ja tiedon käsittely perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) yläkoulun ohjelmointiin liittyvät tavoitteet ovat osa muiden oppiaineiden opetusta: ohjelmointia ”harjoitellaan osana eri oppiaineiden opintoja.” (Opetushallitus, 2014, s. 284) Opetuksen näkökulma on teknologioiden hyödyntämisessä ja käytännön taidoissa. Myös tietoturvaan ja vuorovaikutukseen liittyvät tavoitteet nostetaan esiin. Erillistä ohjelmoinnin tai tietotekniikan oppiainetta sen sijaan ei ole – enää. Tietotekniikan valinnaisaine oli vieraillut vuoden 1985 peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmien perusteissa, mutta poistunut sieltä jo seuraavan opetussuunnitelmauudistuksen myötä vuonna 1994 (Laaksonen & Lupunen, 2021, s. 52–53).

Taulukossa 1 on kuvattu opetuksen tavoitteita ja sisältöä, oppimisen tavoitteita sekä arviointia algoritmisen ajattelun ja ohjelmoinnin osalta. Nämä kuuluvat erityisesti matematiikan sisältöalueeseen S1 *Ajattelun taidot ja menetelmät*. Yläkoulussa algoritmista ajattelua tulisi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan syventää (Opetushallitus, 2014, s. 375), eli sitä pitäisi aiempien opintojen perusteella jo olla jonkin verran. Päättöarvioinnin kriteerien mukaan peruskoulunsa päättävän tulisi vähintäänkin “tunnistaa yksinkertaisen algoritmin askeleet” (Opetushallitus, 2020, 181).

Ohjelmointia harjoitellaan osana sisältöaluetta S1 *Ajattelun taidot ja menetelmät*. Tavoitteena on, että oppilas osaisi sekä ohjelmoida itse että käyttää valmiita ohjelmia ongelmien ratkaisussa ja matematiikan opiskelussa. Saadakseen päättöarvioinnissa arvosanan 5 oppilaan tulee vähintäänkin osata testata “ohjattuna valmiita ohjelmia” (ks. Taulukko 1) (Opetushallitus 2020, s. 181).

Oppimisen ja opetuksen tavoitteissa on siis opetussuunnitelman perusteiden näkökulmasta kaksi osaa: algoritmisen ajattelun periaatteet ja ohjelmointitaito. Päättöarvioinnin kriteereissä ohjelmointia ja algoritminen ajattelun osaamista ei kuitenkaan kytketä toisiinsa. Näin ollen kriteerien näkökulmasta toista voi osata osaamatta toista – oppilaalla voi siis olla algoritmisen ajattelun taitoja, vaikka hän ei osaisikaan ohjelmoida. Vastaavasti voi osata ohjelmoida, mutta algoritmisen ajattelun taidot voivat olla heikot tai olemattomat. Molempia tulee kuitenkin osata, eikä edes arvosanaa viisi saa ilman kumpaankin liittyvää osaamista. Perusteissa algoritmisen ajattelun taitojen harjoittelussa keskeistä on ongelmanratkaisutaito, ei suurien tietomäärien käsittely tai jonkin muun tietojenkäsittelytieteen osa-alueista. Samaan tapaan ohjelmointi liittyy perusteissa algoritmiseen ajatteluun, ei tiedon käsittelyyn.

Taulukko 1. Algoritmisen ajattelun ja ohjelmoinnin opetus perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014, s. 375) ja sen päättöarvioinnin kriteereissä (Opetushallitus, 2020, s. 181).

Opetuksen tavoite (T20)	Ohjata oppilasta kehittämään algoritmista ajatteluaan sekä taitojaan soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen
Opetuksen sisältö (S1 Ajattelun taidot ja menetelmät)	Syvennetään algoritmista ajattelua. Ohjelmoidaan ja harjoitellaan hyviä ohjelmointikäytäntöjä. Sovelletaan itse tehtyjä tai valmiita tietokoneohjelmia osana matematiikan opiskelua.
Oppimisen tavoite	Oppilas ymmärtää algoritmisen ajattelun periaatteita. Hän osaa lukea, kommentoida, tulkita, testata, suunnitella ja ohjelmoida pieniä ohjelmia, joilla ratkaistaan matemaattisia ongelmia.
Arvioinnin kohde	Algoritminen ajattelu ja ohjelmointitaidot
Päättöarvioinnin kriteerit, arvosana 5	Oppilas tunnistaa yksinkertaisen algoritmin askeleet ja testaa ohjattuna valmiita ohjelmia.
Päättöarvioinnin kriteerit, arvosana 7	Oppilas käyttää ehto- ja toistorakennetta ohjelmoinnissa sekä testaa ja tulkitsee ohjelmia.
Päättöarvioinnin kriteerit, arvosana 8	Oppilas soveltaa algoritmisen ajattelun periaatteita ja ohjelmoi pieniä ohjelmia.
Päättöarvioinnin kriteerit, arvosana 9	Oppilas hyödyntää ohjelmointia ongelmien ratkaisussa. Oppilas muokkaa ja kehittää ohjelmaa.

4.2 Ohjelmointi ja algoritmit tiedon käsittelynä – tietojenkäsittelytieteen näkökulma opetussuunnitelman perusteisiin

Tietojenkäsittelytieteen tieteenalan näkökulmasta erityisen kiinnostavaa opetussuunnitelman perusteissa on se, että algoritmista ajattelua tai ohjelmointia ei liitetä sisältöalueeseen S6 *Tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys* (Opetushallitus, 2014, s. 375), vaikka nimen perusteella niin voisi helposti ajatella. Mitä ohjelmointi ja algoritmit oikeastaan ovat, jos eivät tietojen käsittelyä? Opetussuunnitelmassa tiedon käsittely näkyy ymmärrettävän kuitenkin ennen kaikkea käsin tehtävänä tiedon käsittelynä. Tietokoneen tai laskimen käyttöä ei toki kielletä, mutta ohjelmointia ei tässä yhteydessä mainita eikä sisältöaluetta S6 ja tavoitetta T20 liitetä toisiinsa.

Tietojenkäsittelytieteen näkökulmasta nämä kolme asiaa – tietojen käsittely, ohjelmointi ja algoritmit kuitenkin liittyvät kiinteästi toisiinsa. Tietojenkäsittelytiede on tiedekentällä suhteellisen uusi tulokas, mutta keskeistä siinä on tiedon käsittely. Esimerkiksi Helsingin, Itä-Suomen, Tampereen ja Turun yliopistot nostavat tiedon käsittelyyn liittyvät kysymykset esiin opintosuuntaa esitellessään: tieteenalaan liittyy muun muassa tiedon hallinta, tietoliikenne, tietoturva sekä tiedon esittäminen, optimointi, tallentaminen, järjestäminen ja muu käsittely. Samassa yhteydessä mainitaan myös ohjelmointi, ohjelmistot ja algoritmit. (Itä-Suomen yliopisto, 9.4.2022; Helsingin yliopisto, 9.4.2022; Tampereen yliopisto, 9.4.2022; Turun yliopisto, 9.4.2022)

Tieteenalan näkökulmasta ohjelmointi ja algoritmit liittyvät siis luontevasti perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden sisältöalueen S6 sisältöihin: tiedon jäsentämiseen ja analysointiin, sen käsittelyyn, kuten keskiarvon tai mediaanin laskemiseen sekä diagrammien tuottamiseen. Myös muilla sisältöalueilla on monia kohtia, joihin ohjelmointi ja algoritmit voidaan liittää luontevalla tavalla; esimerkkinä mainittakoon jaollisuuteen, lukujonoihin ja alkutekijöihin jakamiseen liittyvät sisällöt.

Ohjelmoinnilla ja algoritmeilla on siis paljon annettavaa yläkoulun matematiikan opetukselle. Moni LUMATIKKA-kurssille osallistunut onkin kurssitöissään yhdistänyt ohjelmointia ja matematiikan sisältöjä toisiinsa kekseliäästi ja molempia oppisisältöjä hyödyttävällä tavalla. Osallistujat ovat kurssitöissään havainnollistaneet muun muassa geometriaa Pythonin *Turtle-kirjasto* apunaan, kerranneet koordinaatistoa Scratchillä ja syventäneet todennäköisyyksiä simulaatioiden avulla. Algoritmeihin liittyviä ja erityisesti yläkouluun soveltuvia pedagogisia ideoita esitellään tämän artikkelin lopussa.

5 LUMATIKKA-kurssi *Algoritmisen ajattelun kehittäminen*

Algoritmeihin liittyvä opettaminen voi tarkoittaa ainakin kahta asiaa: toisaalta se voi tarkoittaa yksittäisten algoritmien opettamista siten, että oppijalle esitellään algoritmin määritelmiä, erilaisia algoritmityyppejä ja algoritmeja sekä kerrotaan, mitä ongelmia ne ratkaisevat ja mihin niitä käytetään. Tällöin oppija saa käsityksen siitä, millaisia ratkaisuvaihtoehtoja on olemassa ja mahdollisesti myös, miten algoritmeista voidaan sanallisen kuvailun tai pseudokoodin avulla tehdä konkreettisia ohjelmatoteutuksia. Näin algoritmeja voidaan havainnollistaa ohjelmoinnin avulla. Esimerkiksi Helsingin yliopistossa tietojenkäsittelytieteen kandivaiheen opintoihin kuuluu algoritmeihin tutustuminen tästä näkökulmasta (Helsingin yliopisto, 29.4.2022).

Toisaalta taas voidaan opettaa algoritmista ajattelua ilman, että esitellään algoritmin määritelmää tai yhtään todellista algoritmia tai edes mainitaan ohjelmointia. Tällöin tavoitteena on ennemminkin oppia ajattelun taitoja, jotka ovat hyödynnettävissä monenlaisissa vastaantulevissa ongelmatilanteissa. Algoritmista ajattelua voidaan harjoittaa niin leikkien kuin pulmatehtäviäkin ratkaisemalla – ihan ilman tietokonettakin. Tämä lähestymistapa on nähtävissä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014).

Molempia näkökulmia voidaan perustellusti kritisoida ja puoltaa. Ilman konkreettisia esimerkkejä algoritmin käsite voi helposti jäädä hahmottomaksi ja algoritmien merkitys tavoittamatta. Mikäli esitellään vain yksittäisiä algoritmeja, voi osaaminen jäädä pinnalliseksi ja ongelmanratkaisutaidot vähäisiksi. Sekä todellisten algoritmien tuntemukselle että ongelmanratkaisutaitojen kehittämiselle on tarve nyky-yhteiskunnassamme. On tärkeää ymmärtää sekä sitä, miten algoritmit vaikuttavat elämäämme, että millaisia ongelmia niiden avulla voidaan ratkaista.

LUMATIKKA-kurssilla *Algoritmisen ajattelun kehittäminen* on lähdetty siitä ajatuksesta, että molemmat näkökulmat ovat tärkeitä eli sekä algoritmeihin tutustumisella että ohjelmoinnilla on paikkansa algoritmisen ajattelun kehittämisessä. Algoritmeihin tutustumalla kurssilainen saa alustavan käsityksen siitä, millaisia algoritmeja on olemassa ja millaisiin tarkoituksiin niitä voidaan käyttää. Ohjelmointia harjoittelemalla tulee harjoitelleeksi monia algoritmiseen ajatteluun liittyviä tärkeitä osatekijöitä. Näitä ovat muun muassa ongelman pilkkominen pieniin, ratkaistavissa oleviin osaongelmiin, abstraktin ajattelun taito sekä löydetyn ratkaisun yleistäminen niin, että sitä voidaan hyödyntää myös muissa yhteyksissä (Wing, 2006, s. 33; Selby & Woollard, 2013). Kurssin teemaosiot MOOC-oppimisympäristössä näkyvät kuvasta 1.

Kuva 1. Kurssin teemaosiot MOOC-oppimisympäristössä.

Kurssi aloitetaan ohjelmointiin tutustumisella. Aluksi pohditaan, miksi ohjelmointia oikeastaan kannattaa opiskella ja opettaa sekä tutustutaan valikoimaan ohjelmoinnin peruskäsitteitä. Peruskäsitteistä kurssilla esitellään *muuttujat*, *ehtolauseet*, *toistorakenteet* sekä *syöte* ja *tuloste*. Niin ikään käydään läpi joukko eri ohjelmointikielille tyypillisiä tietotyyppejä kuten *merkki*, *merkkijono*, *kokonaisluku*, *liukuluku*, *totuusarvo* sekä *lista*. Käsitteisiin tutustumisen jälkeen ohjelmointia harjoitellaan MIT-yliopistossa opetustarkoitusta varten kehitetyllä *visuaalisella ohjelmointikielellä* Scratchilla.

Oman Scratch-ohjelman voi tehdä joko oman idean pohjalta itsenäisesti tai seuraamalla valmista ohjelmointiohjetta. Valmista ohjetta seuraamalla Scratchin käyttö tulee tutuksi varsin vaivattomasti, ja samalla edellä esitellyt ohjelmoinnin peruskäsitteet konkretisoituvat. Esimerkiksi tietojenkäsittelytieteen tiedeluokka Linkin laatima ohje keräilypelin suunnittelemiseen tutustuttaa ohjelmoijan muuttujiin, ehtolauseisiin ja toistorakenteisiin. Itsenäisesti oman suunnitelman pohjalta työskennellessä harjoituksessa korostuvat ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen alkaen ohjelman rakenteen suunnittelusta ja vastaan tulevista ongelmatilanteista selviämisestä.

Monella kurssilaisista ei ole aiempaa kokemusta ohjelmoinnista, ja valmis ohje tarjoaa tärkeää tukea ohjelmoinnin aloitukseen. Ohjelmointi saatetaan kokea vaikeaksi aiheeksi, minkä vuoksi epäilyksenä voi olla, voiko sitä oppia itse lainkaan. Tehtävän tarkoituksena onkin ollut antaa onnistumisen kokemuksia, tukea osallistujien minäpystyvyyden tunnetta sekä vahvistaa ajatusta siitä, että jokainen voi oppia ohjelmoimaan, kunhan saa opetusta ja riittävästi tarvittavaa tukea.

Itsensä uuden opettelulle altistaminen voi tehdä hyvää myös oman opettajuuden kasvulle. Tämä on korostunut kurssilaisten vastauksissa erityisesti toisella LUMATIKKA-kurssilla, jolla tutustutaan ohjelmointiin: *Ohjelmoinnin merkitys matematiikan opetuksessa* -kurssilla moni osallistuja on kuvannut, miten Python-ohjelmointikielen tehtävien parissa tuli koettua monia sellaisia tunteita, joita on tottunut näkemään omissa oppilaissa. Tällaisia ovat olleet turhautumisen, epätoivon ja osaamattomuuden tunteet – tunteita, jotka lienevät tuttuja suurimmalle osalle ohjelmointia joskus kokeilleista. Moni on kertonut samaistuneensa kokemuksen jälkeen paremmin oppilaidensa tunteisiin sekä kertonut uskovansa kokemuksella olevan positiivinen vaikutus oppilaiden auttamiseen heistä vaikealta tuntuvien tehtävien kanssa.

Ohjelmoinnin perusteiden jälkeen Algoritmisen ajattelun kehittäminen -kurssilla tutustutaan algoritmeihin: Tehtävänä on tutustua tarkemmin yhteen algoritmiin ja kirjoittaa siitä lyhyt kuvaus muiden kurssilaisten ja kurssin ohjaajan luettavaksi. Tutustumalla valitsemaansa sekä muiden kurssilaisten valitsemiin algoritmeihin osallistuja saa kuvan siitä, millaisia algoritmeja on olemassa, miten nämä algoritmit suurin piirtein toimivat sekä millaisiin tarkoituksiin niitä käytetään.

Tehtävän haasteena on ollut osallistujalle mahdollisesti aivan uuteen asiaan tutustuminen, sen hahmottaminen, mitä algoritmi-käsitteellä ylipäätään tarkoitetaan ja mitkä kaikki ovat algoritmeja. Valinnan helpottamiseksi algoritmin on voinut valita eri algoritmityyppejä edustavia algoritmeja sisältävältä listalta, joka on tarjonnut yhden näkökulman siihen, millaisia algoritmeja on olemassa. Tehtävän yhtenä tavoitteena on ollut myös algoritmeista kertomisen harjoittelu siten, että sellaisetkin kuulijat, joiden erityisosaaminen ei ole tietojenkäsittelytieteen alalla, voisivat ymmärtää, mistä on kyse. Tehtävän tuomia tietoja algoritmeista sekä algoritmeista kertomisen taitoa kurssilaiset voivat hyödyntää osana omaa opetustaan. Kun tuntee erilaisia algoritmeja ja algoritmityyppejä, voi antaa oppilailleen esimerkkejä jokaisen elämään vaikuttavista algoritmeista. Kurssilla onkin saatu lukea erittäin onnistuneita ja sopivan yksityiskohtaisia kuvauksia niistä.

Kurssin toisen kokonaisuuden muodostaa ohjelmoinnin opettaminen ja opetuksen suunnittelu. Kurssilaisia ohjataan pohtimaan sitä, minkä ikäisten kanssa ohjelmoinnin opetuksen voi aloittaa, mikä siinä on helppoa tai mahdollisesti vaikeaa sekä miten oppijoita voisi tukea oppimisprosessissa. Pohdinnassa voi myös reflektoida oppimistaan, onhan monella kurssilaisista vielä tuoreessa muistissa oma ensikosketus ohjelmointiin edellä kuvatun Scratch-tehtävän muodossa.

Ohjelmoinnin opetuksen suunnittelua pohjustetaan esittelemällä erilaisia ohjelmointikieliä ja *ohjelmointiympäristöjä*, joita koulun ohjelmoinnin opetuksessa voidaan hyödyntää. Tähän asti kurssilla opittua kootaan yhteen antamalla mielikuvituksen lentää: tehtävänä on pohtia, mitä sellaista haluaisi toteuttaa ohjelmoinnin, algoritmien ja teknologioiden avulla, joka ratkaisisi jonkin elämässä vastaan tulleen ongelman. Mielikuvitusta ruokkii myös tehtävä, jossa tutustuttavana on joukko eri lähteistä koottuja, ohjelmointiin ja algoritmeihin liittyviä leikkejä.

Kuvittelu- ja leikinvalintatehtävät pohjustavat harjoitusta, jossa tehtävänä on laatia tuntisuunnitelma ohjelmoinnin ja algoritmisen ajattelun kehittämiseen. Samoin kuin itse ohjelmoinnin, niin myös sen opettamisen on osa kurssilaisista kokenut vaativaksi epäillen omien taitojen riittävyyttä. Kurssilla kuitenkin halutaan rohkaista kokeilemaan, yrittämään, erehtymään ja oppimaan. Ohjelmoinnissa ja ongelmanratkaisussa erehtymistä tuskin voi välttää, eikä se aina tunnu mukavalta. Siksikin on tärkeää harjoitella myös epäonnistumista ja sitä, että siitä huolimatta yrittää uudestaan – näin myös opetuksessa. Kaikkea ei tarvitse osata, ei etenkään heti, eikä edes opettajan. Oppimista saa tapahtua niin oppilailla kuin opettajallakin opetuksen lomassa.

Tuntisuunnitelmatehtävässä kurssilaiset laativat kuvauksen oppitunnista tai oppituntikokonaisuudesta, jossa ohjelmointia opetetaan itsenäisenä aiheena tai osana jotakin muuta oppiainetta. Suunnitelmasta saadaan palautetta niin muilta kurssilaisilta kuin kurssin ohjaajaltakin. Vuosien aikana luvan antaneiden kurssilaisten tuntisuunnitelmat on koottu yhteen kurssilaisten iloksi ja hyödyksi.

Kurssin viimeisissä osissa pohditaan eriyttämistä, luodaan katsaus tietoturvaan ja tietoliikenteeseen sekä pohditaan sitä, millaisessa ympäristössä itse opettaa algoritmeihin ja ohjelmointiin liittyviä sisältöjä. Kurssin yhtenä tavoitteena on saada ideoita oman opetuksen tueksi sekä rohkaistua jakamaan omia ajatuksiaan myös muille. Kurssin lopuksi osallistujia kannustetaankin toimimaan yhteistyössä ja jakamaan ideoita ja käytäntöjä niin omassa koulussa kuin muuallakin opettavien kollegojen kanssa. Tätä tavoitetta tukeakseen kurssin pohdintatehtävät palautetaan kaikkien kurssilaisten nähtävissä oleville keskustelualueille. Tehtävissä ääneen lausutut ideat tulevat siis jakoon kuin itsestään ja ovat sovellettavissa eri ikäisille oppijoille.

Kurssille osallistuneet ovat saadun palautteen perusteella kokeneet kurssin oman opetuksen kannalta hyödyllisenä: kurssi on innostanut aiheen parissa työskentelyyn, tarjonnut valmiita ideoita omassa opetuksessa hyödynnettäväksi ja vahvistanut luottamusta omaan osaamiseen. Toisaalta kurssin myötä on saattanut huomata, että opittavaa onkin vielä enemmän kuin oli ajatellut, ja että oma osaaminen on kurssin jälkeenkin vielä melko pintapuolista, eli ymmärtää oppimisen polun vasta alkavan. Parhaimmillaan kurssi on kuitenkin myös syventänyt ja selkeyttänyt algoritmeihin ja ohjelmointiin liittyvää ajattelua.

6 Pedagogisia ideoita – algoritmit opetuksessa

LUMATIKKA-kurssilla *Algoritmisen ajattelun kehittäminen* osallistujia haastetaan sitomaan ohjelmoinnin, algoritmien ja algoritmisen ajattelun opettaminen osaksi valitsemaansa oppiainetta – matematiikkaa tai mitä tahansa muuta ainetta. Alle kootut pedagogiset ideat ovat saaneet inspiraatiota pääosin kurssilaisten tehtävistä. Harjoitukset voi toteuttaa yksittäisinä oppitunteina tai esimerkiksi kiertopistetyöskentelynä. Pisteitä voidaan kiertää pareittain tai pienissä ryhmissä.

Salausalgoritmit

Salaperäiset viestit kiehtovat monia ja motivoivat oppimisen pariin. Viestien salausta ja salauksen purkamista voidaan harjoitella esimerkiksi yksinkertaisen ja oikeasti käytössä olleen *Caesar-salauksen* avulla. Siinä viesti salataan vaihtamalla kirjaimia toisiinsa tietyn siirtymän verran niin, että viimeiseen kirjaimeen päästäessä siirrytään seuraavaksi aakkosten alkuun. Jos siirtymä on 3, kirjain a vaihdetaan kirjaimeen d ja kirjain b kirjaimeen e. Vastaavasti kirjaimesta ä tulee kirjain b. Salausta voidaan myös soveltaa niin, että siirtymä onkin taaksepäin, esimerkiksi -3. Salauksen purkaminen tapahtuu siirtymällä päinvastaiseen suuntaan.

Haastavampi, mutta tutustumisen arvoinen salausalgoritmi on alkulukuja ja lukujen yhteisiä tekijöitä hyödyntävä *RSA-salaus*[1]. Algoritmin käyttö voidaan tehdä kokonaan käsin tai siinä voidaan hyödyntää ohjelmointia esimerkiksi Pythonilla. Salauksessa luodaan kolmen luvun avulla kaksi salausavainta: julkinen ja yksityinen. Ideana on, että viesti salataan julkista salausavainta ja tiettyä laskukaavaa käyttäen ja puretaan yksityistä avainta sekä toista laskukaavaa käyttäen. Algoritmiin tutustumista varten opettaja voi luoda avaimet etukäteen, jolloin oppilaiden tehtäväksi jää laskukaavojen käyttäminen. Vaihtoehtoisesti salausta voidaan ensin harjoitella valmiilla avaimilla, minkä jälkeen jokaisen tulee muodostaa itse uusi avain.

Salausalgoritmeihin liittyvänä tehtävänä voi olla ensin salauksen purkaminen annetusta viestistä, minkä jälkeen oma (vastaus)viesti tulee salata samalla tavalla. Caesar-salauksen yksinkertaisuuden vuoksi sillä käsiteltävät viestit voivat olla pitkiäkin, kun taas RSA-salaukseen kannattaa valita suhteellisen pieniä, vaikkapa kuusinumeroisia lukuja. Kehykseksi voi halutessaan kehittää jännittävän tarinan, joka kertoo, miksi salausta välttämättä tarvitaan. Salausalgoritmeihin tutustuminen voidaan aloittaa Caesar-salauksella ja siirtyä sen jälkeen vaikeampaan RSA-salaukseen. Lopuksi voidaan pohtia tosielämän tilanteita, joissa salausta tarvitaan tai käytetään. Esimerkkejä voi etsiä niin vakoiluun kuin arkisempiinkin aiheisiin, kuten verkkopankkiin ja pikaviestimiin (esimerkiksi WhatsApp ja Telegram) liittyen.

Järjestämisalgoritmit

Algoritmeja voidaan opiskella myös toiminnallisesti. Erityisen hyvin tähän soveltuvat järjestämisalgoritmit, joissa esimerkiksi listan alkiot järjestetään suuruusjärjestykseen. Harjoituksessa oppilaat saavat kukin numerolapun ja asettuvat riviin satunnaiseen järjestykseen. Rivi kuvaa listaa ja oppilaat sen alkioita. Yksi oppilaista (tai oppilaspari) johtaa toimintaa seuraten annettua algoritmia vaihe vaiheelta ja kertoen, minne kenenkin pitää milloinkin liikkua. Käytettäviksi järjestämisalgoritmeiksi sopivat esimerkiksi *lomitus- tai pikajärjestäminen* tai yksinkertainen ja hauskasti nimetty mutta auttamattoman hidas *kuplajärjestäminen*.

[1] Kiitos Ari Virtaselle ideasta käyttää RSA-salausta kouluopetuksessa.

Järjestäminen voidaan toistaa useita kertoja, jolloin useammat oppilaista pääsevät tutkimaan algoritmia ja antamaan ohjeita. Mikäli aikaa on, mukaan voidaan ottaa algoritmien nopeuden vertailu, järjestämiseen kuluvaa aikaa mittaamalla tai siirtymisten lukumäärä laskemalla. Lisäksi voidaan tarkastella erikseen tilanteita, joissa oppilaat ovat lähes oikeassa järjestyksessä. Millä algoritmilla menee silloin eniten aikaa ja millä vähiten? Numerolappujen sijaan voidaan käyttää myös vaikkapa kirjaimia tai eri kokoisia esineitä – mitä vain, minkä voi laittaa yksiselitteiseen (suuruus)järjestykseen. Mikäli harjoitukset toteutetaan kiertopistetyöskentelynä, tällä pisteellä yhtä aikaa olevat ryhmät voivat yhdistyä pisteellä olon ajaksi.

Samaan tapaan voidaan tutustua myös binäärihakuun. Oppilailla olevat laput kuvaavat listalla olevia alkioita, joita voivat olla esimerkiksi numero, kirjain tai sana. Listaa kuvaavaan riviin asetutaan tällä kertaa järjestykseen ja alkiota kuvaavaa lappua pidetään taustapuoli ylöspäin. Algoritmia seuraava oppilas saa etsittäväkseen tietyn listalla olevan alkion. Kun päästään kohtaan, jossa tehdään tarkistus “onko listan tässä kohdassa oleva alkio sama kuin etsittävä”, lappua pitelevä oppilas kääntää lapun ja näyttää siinä olevan alkion. Mikäli harjoitukseen haluaa lisähaastetta ja syvyyttä, valittu algoritmi voidaan toteuttaa ohjelmoimalla esimerkiksi opettajan johdolla.

Järjestämisalgoritmeihin tai binäärihakuun tutustuminen tukee algoritmisen ajattelun kehittämistä. Ne tarjoavat esimerkin siitä, kuinka jokin ratkaistavana oleva ongelma (järjestykseen saattaminen) voidaan ratkaista pilkkomalla se pienempiin palasiin, osaongelmiin, ja yhdistämällä osaongelmien ratkaisu koko ongelman ratkaisuksi. Useampaan saman ongelman ratkaisevaan algoritmiin, esimerkiksi kahteen eri järjestämisalgoritmiin tutustuminen, taas havainnollistaa, että sama ongelma voidaan ratkaista useammalla eri tavalla. Ratkaisutapoja, algoritmeja, voidaan myös vertailla toisiinsa ja tutkia sitä, mikä niistä ratkaisee ongelman tehokkaimmin.

7 Lopuksi: Algoritmit ja matematiikan opetus

Algoritminen ajattelu ja ohjelmointi ovat osa erityisesti matematiikan oppiainetta. Käytännön opetusjärjestelyissä on koulujen välillä eroja. Opetussuunnitelman perusteiden sanamuodon ”osana eri oppiaineiden opintoja” voi ymmärtää ainakin kahdella tavalla: ohjelmoinnin harjoittelu voidaan toteuttaa erillisenä, erikseen arvioitavana kokonaisuutena tai sitoa opiskeltaviin aiheisiin niin, että molempia harjoitellaan yhtä aikaa.

Mikäli ohjelmoinnin opetus järjestetään erillisenä kokonaisuutena, oppitunneista osa varataan ohjelmoinnin harjoittelulle ja niillä keskitytään ohjelmointiin.

Luontevalta tuntuva malli on altis kritiikille: Opettajan näkökulmasta tämä tarkoittaa aiempaan opetussuunnitelmaan nähden vähemmän aikaa opetussuunnitelmassa mainituille muille sisällöille, sillä tuntijakoa ei muutettu tai matematiikan opetussisältöjä juuri karsittu opetussuunnitelmauudistuksen yhteydessä.

Oppilaan näkökulmasta taas ohjelmointi voi tuntua muusta oppisisällöstä irralliselta kokonaisuudelta, ja siihen liittyvät tiedot ja taidot voivat unohtua nopeasti opintojakson päätyttyä. Ohjelmoinnin ja algoritmisen ajattelun osaaminen tulee myös arvioida arviointikriteerien mukaisesti, eikä sitä siksi voi jättää ainakaan lukukauden aivan viimeisten oppituntien hauskaksi ja "ylimääräiseksi" aiheeksi. Toisaalta harkitusti toteutettuna ohjelmoinnin opetuskokonaisuus toimii hyvänä johdatuksena ohjelmointiin, tarjoaa mahdollisuuden oppia sen perusteet syvällisesti ja tuo esiin sen ominais- ja erityispiirteitä.

Vaihtoehtoisesti ohjelmoinnin opetus liitetään jatkuvasti osaksi muuta opetusta, eikä sitä ole erotettu omaksi kokonaisuudekseen. Tällöin ohjelmointi ja algoritmit näyttäytyvät parhaimmillaan hyödyllisinä ja hyödynnettävinä tietoina ja taitona, joita voi käyttää apuna aidoissa ongelmanratkaisutilanteissa. Ohjelmoinnin harjoittelu voi syventää esimerkiksi matematiikan sisältöjä ja tukea niiden oppimista. Toisaalta mikäli ohjelmoinnista ei missään kohtaa käydä systemaattisesti läpi perusteita, voi osaaminen jäädä toistamisen tasolle, eikä syvempää ymmärrystä ohjelmoinnin periaatteista synny. Oppilas voi esimerkiksi osata käyttää todennäköisyyttä simuloivaa ohjelmaa ilman, että ymmärtää, mitä mikäkin rivi oikeastaan tekee. Tämä voi riittää päättöarvioinnissa alimpien arvosanojen saamiseksi, mutta ylempiin vaaditaan jo syvempää osaamista – jota taas on vaikea saavuttaa ilman perusteiden hallintaa. Ohjelmointi voi myös näyttäytyä hahmottomana ja satunnaisesti toimivana asiana, jos sen kohtaa milloin minkäkin asian yhteydessä ilman, että yhteyttä on selväsanaisesti selitetty.

Parhaimmillaan algoritmien opetus tukee kuitenkin matematiikan opetuksen tavoitteiden saavuttamista – ei vain algoritmisen ajattelun kehittämisen, vaan monen muunkin sisältöalueen, alkuluvuista ongelmanratkaisutaitoihin. Algoritmeja siis kannattaa ja pitääkin opettaa yläkoulussa. Niihin voi tutustua ohjelmoinnin yhteydessä, mutta myös ilman tietokonetta. Erilaiset algoritmit ovat kiinteä osa arkeamme ja juhlaamme – siten on tärkeää tietää, mitä nämä algoritmit ovat ja miten ne toimivat.

Lähteet

Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. (2009). *Introduction to Algorithms* (3. painos). The MIT Press.

Helsingin yliopisto. (29.4.2022). *Tietojenkäsittelytieteen opintojen rakenne ja aikataulu*. https://www.helsinki.fi/fi/koulutusohjelmat/tietojenkasittelytieteen-kandiohjelma/opiskelu/tietojenkasittelytieteen-opintojen-rakenne-ja-aikataulu

Helsingin yliopisto. (9.4.2022). *Tietojenkäsittelytieteen esittely*. https://www.helsinki.fi/fi/matemaattis-luonnontieteellinen-tiedekunta/tiedekunta/tietojenkasittelytiede

Itä-Suomen yliopisto. (9.4.2022). *Tietojenkäsittelytieteen tutkinto-ohjelman opas*. https://www.uef.fi/fi/koulutus/tietojenkasittelytiede

Lappalainen, E. (13.4.2011). Pelialan kasvu imee osaajia. *Helsingin Sanomat*: Talous. https://www.hs.fi/talous/art-2000004800356.html

Koistinen, O. (23.11.2013). Jo 4-vuotias osaa ohjelmoida tietokonetta. *Helsingin Sanomat:* Teknologia. https://www.hs.fi/teknologia/art-2000002691046.html

Knuth, D. (1973). *The Art of Computer Programming*. Volume 1 / Fundamental Algorithms (2. painos). Addison-Wesley Publishing Company.

Laaksonen, A. & Lupunen, V. (2021). *Ohjelmointia oppimassa: Tietojenkäsittelytieteen tiedekasvatuksen vaiheita Helsingin yliopistossa*. Tiedeluokka Linkin 10-vuotisjuhlakirja. Helsingin yliopisto. http://hdl.handle.net/10138/337787

Lehtinen, T. (21.1.2014). Ministeri Kiuru: Ohjelmointi peruskoulun opetussuunnitelmaan. *Helsingin Sanomat*: Kotimaa. https://www.hs.fi/kotimaa/art-2000002704026.html

Malmberg, N. (16.10.2013). Suomen koulujen it-opetus Jordanian tasolla – uutta mallia haetaan Virosta. *YLE-uutiset*. https://yle.fi/uutiset/3-6885099

Opetushallitus. (2020). Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit. *Opetushallituksen määräys 2020:5042*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/Perusopetuksen%20päättöarvioinnin%20kriteerit%2031.12.2020_0.pdf

Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. *Määräykset ja ohjeet 2014:96*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Selby, C. & Woollard, J. (2013). *Computational thinking: the developing definition University of Southampton*. https://eprints.soton.ac.uk/356481

Sipser, M. (2006). *Introduction to the Theory of Computation* (2. painos). Course Technology.

Tampereen yliopisto. (9.4.2022). *Tietojenkäsittelytieteiden koulutuksen esittely*. https://www.tuni.fi/fi/tule-opiskelemaan/tietojenkasittelytieteiden-koulutus

Turun yliopisto. (9.4.2022). *Tietojenkäsittelytieteen opiskelun esittely*. https://www.utu.fi/fi/opiskelijaksi/tietojenkasittelytiede-luonnontieteiden-kandidaatti-ja-filosofian-maisteri-3-v-2-v

Ukkonen, E. (2003). Mihin algoritmeja tarvitaan*? Tieteessä tapahtuu, 21*(7), 19–22. https://journal.fi/tt/article/download/57286/19319, viitattu 31.3.2022

Yadav, A., Stephenson, C., Hong, H. (2017). Computational thinking for teacher education. Commun. *ACM, 60*(4), 55–62. https://doi.org/10.1145/2994591

Motivoidaan opiskelijoita ja karkotetaan matikka-ahdistusta: ammatillisen matematiikan arkea

Sissi Huhtala ja Seppo Janhonen

Pedagogiset ratkaisut ja kulttuuri, Tampereen ammattikorkeakoulu

Tiivistelmä: Artikkelissa kuvataan vuosina 2019–2022 toteutetuilla *Lumatikka2: Ammatillisen koulutuksen matematiikkaa opiskelijakeskeisesti* -täydennyskoulutuskursseilla tehtyjä havaintoja ja niihin perustuvia pohdintoja ammatillisen matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Kurssille osallistuvat opettajat kantavat usein huolta opiskelijoidensa matematiikan heikosta lähtötasosta, kielteisestä matematiikkakuvasta sekä heidän kokemastaan matematiikka-ahdistuksesta. Artikkelissa kuvataan myös lähestymistapoja, joilla näihin haasteisiin koetetaan vastata. Sellaisia ovat esimerkiksi opiskelijan todellisuutta tavoittelevat oppimistehtävät, matematiikan kielentäminen, yhteisöllisen oppimisen menetelmät sekä muiden matematiikan opettajien kokemuksista oppiminen.

Avainsanat: kielentäminen matematiikan opiskelussa, matematiikka-ahdistus, matematiikkakuva, minäpystyvyys

Yhteystiedot: sissi.huhtala@tuni.fi

1 Johdanto

Ammatillisessa koulutuksessa matematiikka kuuluu niin sanottuihin YTO-aineisiin (*yhteiset tutkinnon osat*), missä matematiikan opintojen laajuus on neljä osaamispistettä (4 osp). Matematiikan ja matematiikan soveltamisen osaamistavoitteet ilmaistaan ammatillisen koulutuksen perustutkinnossa (ePerusteet) alla esitetyllä tavalla.

Opiskelija osaa:

- tehdä laskutoimituksia ja mittayksiköiden muunnokset ja soveltaa talousmatematiikkaa oman alan ja arkielämän edellyttämässä laajuudessa
- tehdä havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- käyttää loogista päättelykykyä, yhtälöitä ja tarvittavia teknisiä apuvälineitä matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen
- arvioida tulosten oikeellisuutta ja suuruusluokkaa sekä käytettyä ratkaisumenetelmää
- arvioida oman alan matemaattista osaamistaan (Ammatillisen koulutuksen perustutkinto).

Kuvatut osaamistavoitteet ja matematiikan sisällöt painottuvat luonnollisesti osittain opiskelijan oman ammattialan tarpeiden mukaan. LUMATIKKA-täydennyskoulutukseen kuuluva kurssi *Ammatillisen koulutuksen matematiikkaa opiskelijakeskeisesti* pyrkii osaltaan vastaamaan edellä kuvattuihin osaamistavoitteisiin. Kyseisen LUMATIKKA-kurssin kohderyhmänä ovat ammatillisessa koulutuksessa matematiikkaa opettavat opettajat, erityisopettajat ja alan opiskelijat.

Kurssin sisällöt on jaettu kolmeen moduuliin, missä toinen moduuli on jaettu kahteen vaihtoehtoiseen teemaan. Moduulit näkyvät kurssisisältöä kuvaavassa kuvassa 1.

Kuva 1. MOOC-oppimisympäristössä kurssin aloitussivulla oleva kurssikuvaus.

Ensimmäinen moduuli käsittelee *opiskelijalähtöistä tukea*. Moduulin tavoitteena on, että osallistuja saa työkaluja matematiikan opetuksen eriyttämiseen ja monen tasoisten oppijoiden osaamisen vahvistamiseen.

Seuraavasta moduulista osallistuja valitsee itselleen tarpeellisimman teeman tarkasteltavakseen. Valittavana ovat *digitaaliset työvälineet* tai *kielentäminen ja yhteisöllinen oppiminen*. Tavoitteena on tarjota osallistujille uusia näkökulmia ja ideoita keskeisten matematiikan sisältöjen havainnollistamiseen sekä oppia hyödyntämään digitaalisia työvälineitä ja ohjelmistoja monipuolisesti matematiikan opetuksessa.

Kurssin päättävä moduuli on nimeltään *Konkretiaa matematiikkaan*. Moduulin tavoitteena on antaa uusia näkökulmia matematiikan integroinnista opiskelijan omaan ammattialaan.

Tässä artikkelissa kuvaamme sitä, mistä Lumatikan ammatillisen koulutuksen kurssille osallistuneet opettajat hankkeen eri vuosina ovat yleisimmin keskustelleet, ja millaisia näkökulmia he ovat nostaneet esille. Käymme läpi osallistujien kommentointia kolmesta eri näkökulmasta:

1. Mikä on saanut opettajat osallistumaan kurssille? Mihin pulmiin omassa työssään opettajat hakevat ratkaisuja ja uusia ideoita?

2. Miten opettajat ovat kokeneet hyötyneensä kurssista?
3. Millaisia ratkaisu- ja kehittämisehdotuksia opettajat itse esittävät opiskelijoiden matematiikan oppimisen tueksi ja avuksi? Millaisia olemassa olevia tukimalleja opettajat kertovat omissa oppilaitoksissaan olevan?

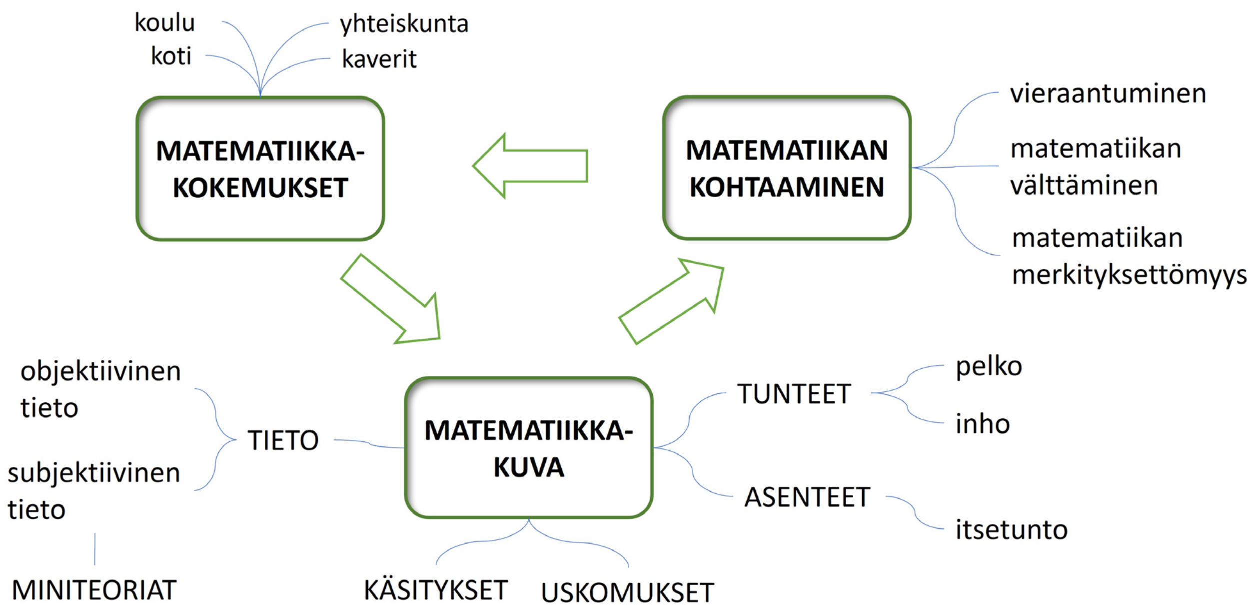
Olemme käyneet läpi ammatillisten oppilaitosten opettajille suunnattuja Lumatikka2-kurssin toteutuskertoja vuosilta 2019–2022, ja lähestymme näitä kolmea näkökulmaa aineistolähtöisesti antamalla äänen kurssille osallistuneille opettajille. Kuvaamme autenttisten lainauksien kera sitä, mitä yleisimmin kurssin keskustelualueilla on puhuttu, millaisia haasteita matematiikan opetuksessa on kohdattu ja millaisia ratkaisutapoja näihin haasteisiin on löydetty.

2 Mikä on saanut opettajat hakeutumaan kurssille?

Ammatillisen koulutuksen aloittaessaan opiskelijalla on vähintään yhdeksän vuotta perusopintoja takanaan, ja siten näiden vuosien kokemukset matematiikan opiskelusta. Ammatilliseen koulutukseen pyrkivät opiskelijat tulevat hakemaan nimenomaan ammattia. Kouluttajien kokemuksen mukaan he toivovat käytännönläheistä opetusta, toiminnallisuutta ja konkretiaa eivätkä teoriaopintoja. Opiskelijoille matematiikka on aiemmin saattanut näyttäytyä vaikeana; sellaisena oppiaineena, joka ei heitä kiinnosta ja jota he eivät koe osaavansa. Tällaisissa tilanteissa opettaja on ensimmäisen ja todella suurenkin pulman edessä, mistä kurssille osallistuneet kertovat:

> “Millä toimenpiteillä tuen niitä opiskelijoita, joilla on 9 vuoden osaamattomuuden kokemukset matematiikassa?”
> “Moni ammatilliseen koulutukseen tuleva opiskelija on tullut opiskelemaan ns. "käsillä tekemistä" ja kaikki teoria-aineet, etenkin yhteiset tutkinnon osat ovat inhokkeja. Matematiikasta saattaa tosiaan olla huonoja kokemuksia peruskoulusta ja se on peikko.”

Oppijan *matematiikkakuva* (kuvio 1) sisältää tietoa oppijalla olevasta matematiikasta, käsityksiä siitä, mitä matematiikka on, miten sitä opiskellaan, ja millainen itse on matematiikan oppijana. Lisäksi matematiikkakuva sisältää paljon uskomuksia, asenteita ja tunteita. Kokemukset matematiikan opiskelusta ja itsestä matematiikan oppijana ovat muodostaneet jokaiselle oppijalle osittain erilaisen matematiikkakuvan. Heikosti matematiikassa menestyneiden oppijoiden tunteet ovat varsin negatiivisia. Ne voivat ilmetä pelkona ja ahdistuksena matematiikkaa kohtaan. Oppijan matematiikkakuva vaikuttaa siihen, miten hän nyt uudessa tilanteessa, ammatillisen koulutuksen matematiikan opinnoissa, matematiikan haluaa kohdata – vai haluaako ollenkaan. Moni oppija joutuu kohtaamaan vahvoja kielteisiä emootioita, jopa pelkoa ja inhoa. (Huhtala & Laine, 2004)



Kuvio 1. Matematiikassa heikosti menestyvän oppijan matematiikkakuva (Huhtala & Laine, 2004)

Moni opiskelija ratkaisee itselleen vaikean tilanteen sillä, että välttää matematiikan kohtaamista. Voimakkaat negatiiviset tunteet, kuten *matematiikka-ahdistus*, myös estävät oppimista (ks. esim. Beilock & Willingham, 2014).

> "Suurimpana ongelmana näen, että moni vaikeuksien kanssa kamppaileva ei ilmaannu ollenkaan paikalle tai kurssit jäävät kesken ja sitten 'rästit' tulevat vastaan vuoden parin päästä, kun pitäisi valmistua ja on jo kiire."
> "Tehtävän teetättäminen sai minut huomaamaan sen kuinka ahdistuneita monet ovat matematiikan vuoksi."

Opettajat tuovat esille myös maahanmuuttajataustaisten opiskelijoiden haasteita, aiemman koulunkäynnin vähäisyyden sekä vasta kehittymässä olevan suomen kielen taidon. Nämä ovat ilmenneet opetuksen yhteydessä eri tavoin:

> "Opiskelija ei ole juurikaan koskaan elämässään käynyt koulua. Aluksi on usein vaikea hahmottaa, onko vaikeuksien syynä tämä vai oppimisvaikeus."
> "Minulla kesti hetken ymmärtää, miten olemattomat hänen taitonsa olivat. Hän ei ymmärtänyt, että on olemassa muitakin lukuja kuin kokonaislukuja."
> "Opiskelija oli maahanmuuttaja, joka opiskeli kokiksi. Hän oli hyvin ahdistunut opiskelua kohtaan johtuen huonosta suomen kielestä. Hyvin usein tunnin jälkeen hän itki, että ei koskaan opi mitään ja vain muut oppivat. Opintojen alussa tehtiin alkutesti ja tulos oli heikko erityisesti sanallisten tehtävien kohdalla."

Lisäksi opettajat kokevat riittämättömyyden tunnetta vähäisten opetustuntiresurssien, eritasoisten opiskelijoiden sekä suurten opiskelijamäärien vuoksi. Siten opettajat saavat kokea opiskelijoidensa matematiikka-ahdistuksen kääntöpuolen.

> “Käytännössä siis pitäisi olla vähintään kolmet eritasoiset materiaalit jokaiselle oppitunnille. Tämä aiheuttaa myös riittämättömyyden tunteita.”
> “Opetustuntien määrät ovat kutistuneet minimiin ja tukea tarvitsevien määrä kasvaa jatkuvasti.”
> “Tunne opiskelijasi. Hyvä ohje, haastavaa toteuttaa. Tänä vuonna minulla on noin 160 ensimmäisen vuoden opiskelijaa, joten aika taitaa loppua kesken.”
> “Meillä on opiskelijoina sekä suoraan peruskoulusta tulleita että aikuisia, kaikenlaisilla taustoilla ja taidoilla. Kaipaisin siis välineitä yksilölliseen etenemiseen mielekkäästi kaikilla osaamisen tasoilla.”

Kuten kuvattua, matematiikan opettaja kohtaa siis usein oppijan traumaattiset aiemmat matematiikkakokemukset ja hänen heikon lähtötasonsa. Kun tähän liitetään vähäiset opetustuntiresurssit, seurauksena on siten helposti opettajan oma riittämättömyyden tunne. Tämä on se lähtökohta, mikä on saanut monet opettajat osallistumaan kurssille, ja mihin he hakevat ratkaisuja ja uusia ideoita.

3 Miten opettajat ovat hyötyneet kurssista?

Kurssin yhtenä tehtävänä on pyytää omia opiskelijoita kirjoittamaan *Minä ja matematiikka -kirjoitelma* esimerkiksi täydentämällä annettuja lauseita (Furner, 2017), kuten “Kun kuulen sanan matematiikka, minä...". Opettajat ovat kertoneet siitä, että Minä ja matematiikka -kirjoitelman teettäminen opiskelijoille avasi heidän silmiään näkemään ja ymmärtämään paremmin opiskelijoiden aiempia matematiikkakokemuksia sekä tunteita matematiikkaa kohtaan. Opettajat olivat nämä asiat aiemminkin tiedostaneet, mutta suoraan opiskelijoilta kysyttyinä ja vastaukset paperille kirjoitettuina ne konkretisoituivat uudella tavalla.

> “Aion jatkossa käyttää tätä kirjoitustehtävää kurssin alkaessa, niin saan tietoa, millainen matikkasuhde opiskelijalla on. Tekstit avasivat lisää minun silmiäni sille, miten vastenmielinen käsitys matematiikasta opiskelijoilla on.”
> “Olin todella hämmästynyt, kun yksi hiljainen poika kirjoitti hyvin vihamielisiä vastauksia paperiin. Hänestä ei muuten huomaa tunnilla mitenkään, että asenne matematiikkaa kohtaan olisi erityisen negatiivinen. Tällainen tehtävä saattaa siis paljastaa todella yllättäviä asioita, jotka eivät muuten kävisi ilmi.”
> “Opiskelijoiden vastaukset yllättivät hieman, monen kohdalla luki pelottaa ja ahdistaa. Lisäksi useassa paperissa oli viittauksia aikaisempiin kokemuksiin, jotka ovat jättäneet negatiivisen jäljen matematiikan opiskeluun.”

> “Itsekin yllätyin negatiivisten kokemusten ja asenteiden määrästä. Itselle heräsi tästä juuri tarve päästä toteuttamaan myös erilaisia oppimistilanteita tunneilla. Ehkä erilaisilla lähestymistavoilla voisi päästä rikkomaan asenteita.”

Kuviossa 2 esitetään ote opettajan teettämästä Minä ja matematiikka -lauseiden jatkamistehtävästä. Palautus on otsikoitu ”Aikuisen oppijan matematiikkafiiliksiä”.

Lauseen alku (opettajan antama)	**Lauseen jatko (opiskelijan laatima)**
1. Matikka herättää minussa sellaisen fiiliksen, että...	*Olen väärässä paikassa.*
2. Kun kuulen sanan matematiikka, ...	*tulee fiilis että haluisin kyllä oppia mutta en usko että opin. en oo ainakaan tähän mennessä oppinu.*
3. Matikan opiskelusta tulee aina mieleen...	*ala-aste* *Musta tuntuu suoraan sanoen järkyltä tulla matikan opetukseen. Se ei liity sinuun mutta kuitenkin.*
5. Haluaisin oppia matikassa... (Miksi?)	*En osaa sanoo asioita. Ainakaan oikeilla nimillä, Haluaisin kuitenkin valmistua ammattiin ja opettajan mukaan jotakin matikkaa täytyis osata.*
6. Haluaisin välttää matikassa... (Miksi?)	*Mielellään ihan kaikkea. Mutta ainakin prosenttilaskuja niitä muunnoksia, kun veivataan niitä jakolaskuja ja näitä.*
7. Lempiasiani matikassa on...	*Koominen kysymys. Ehkä mittaaminen. Jostakin syystä osaan hyvin ne keittiömitat.*
8. Jos voisin kysyä yhdestä asiasta matikassa, se olis...	*Miks tää on niin vaikeeta.*
EXTRA: Haluaisin vielä kertoa, että...	*Mä pelkään että tää katuu tähän matikkaan. Nyt jo tarviin jotakin tukiopetusta vaikka nuoremmatki pärjää hyvin. Tosin ne on kyllä harjottellu vähemmän aikaa sitten.*

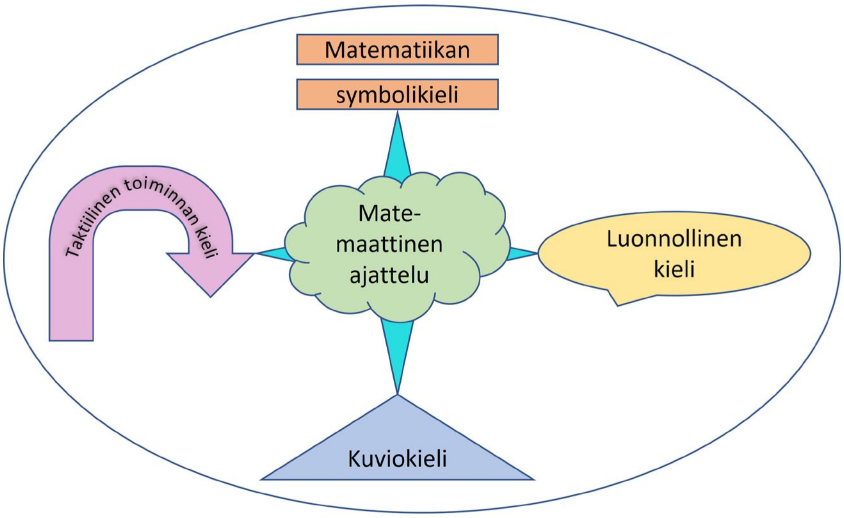
Kuvio 2. Ote eräästä “Minä ja matematiikka”-kirjoitelmasta

Eräs kurssille osallistunut opettaja kertoi, että tämän kirjoitustehtävän jälkeen yhteistyö (tukiopetus) opiskelijan kanssa lähti hyvin käyntiin, kun vanhat kokemukset oli saatu avoimesti kerrotuksi ja tuntemukset matematiikkaa kohtaan ilmaistuksi. Tehtävä on osoittautunut vastaavasti monillekin opettajille mielenkiintoiseksi, sillä opiskelijan vastaukset ovat saattaneet olla heille varsin yllättäviä ja silmiä avaavia.

Toisena opettajat kokeilevat kurssin aikana yhteisöllisen oppimisen ja kielentämisen menetelmiä. Yhteisöllisen oppimisen kokeilujen tavoitteena on saada opiskelijat työskentelemään yhdessä matematiikan parissa, keskustellen ja jakaen ajatuksiaan.

> “Päätin testata yhteisöllistä oppimista niin, että opiskelijaryhmän talousmatikan ‘koe’ olikin ryhmätyönä väitteitä ja ratkaisun analysointia. Keskustelua riitti ja muutamien opiskelijoiden osalta olen tosi positiivisesti yllättynyt. Vielä lopussa tehtäviä esiteltäessä tuli lisää pohdintaa. Tätä yhteisöllistä oppimista pitää kyllä tehdä vielä uudelleen.”
> “Enemmän taas pitäisi rohkaista ja ohjata opiskelijoita sanoittamaan ratkaisunsa itselleen ja myös toisille.”
> “Kun tehtävistä ja niiden ratkaisupoluista keskustellaan, rohkaistuvat oppilaat kummasti vastailemaan ja kertomaan ajatteluketjuistaan. Tällainen ruokkii sitten taas toisten uskallusta osallistua.”

Matematiikan kielentämisen (kuvio 3) ajatellaan olevan ymmärtävän oppimisen perusta. Kielentäessään oppija saa mahdollisuuden rakentaa matemaattista ajatteluaan puhekielen ja kirjoitetun kielen (*luonnollinen kieli*) avulla, piirroksin, kuvin tai graafisin esityksin (*kuviokieli*) sekä matematiikan *symbolikielellä* (Perkkilä & Joutsenlahti, 2022). Myös *taktiilinen toiminnan kieli* auttaa oppijaa konkreettisesti kokeilemisen ja tekemisen kautta ymmärtämään matematiikkaa.



Kuvio 3. Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen neljän kielen avulla (Joutsenlahti & Rättyä, 2015)

Kurssille osallistuneet opettajat ovat kokeilleet kielentämistehtäviä, ja huomanneet esimerkiksi, että joku opiskelija on pystynyt ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan piirtämällä paljon paremmin kuin kirjoittamalla tai matematiikan symbolikielellä. Toisen opiskelijan on ollut luontevampaa käyttää piirtämisen sijasta muuta kieltä, mikä taas on auttanut häntä matematiikan oppimisessa. Ammatillisen koulutuksen opiskelijat ovat usein – jo ammattialan luonteen takia - tekemällä oppivia, joten myös taktiilinen toiminnan kieli voi olla heille avain matematiikan oppimiseen.

> “Huomasin myös alkaneeni kurssin aikana pyytämään enemmän opiskelijoita puhumaan ratkaisuistaan vastausten sijaan.”
> “Tähän kokeiluun käytin variaatiota kertomusmallitehtävässä käyttämästäni tehtävästä, koska halusin syventää osallistujieni matemaattisen ajattelun kielentämistä erilaisten esitystapojen avulla. Tehtävä toi selkeästi esille osallistujieni hyvin erilaiset matemaattiset valmiudet. Tehtävä vahvisti käsitystäni toisen osallistujani päässälaskutaidoista, mutta havaitsin, että piirtäminen yhtenä esitysmuotona tuo kirjoittamista paremmin esille hänen matemaattista ajatteluaan. Toisen osallistujani kohdalla tehtävä konkretisoi niitä puutteita, joita hänellä on peruslaskutoimitusten tekemisessä ja kymmentä suurempien lukujen hahmottamisessa, mutta myös tiedon siitä, että matemaattisen ajattelun piirtäminen on hänelle hyvä keino laskemisen havainnollistamiseen. Voin siis

> hyödyntää saamaani tietoa opetustuokioiden suunnittelussa, ja tulen jatkamaan erilaisten esitystapojen käyttämistä myös siksi, että piirtäminen oli osallistujistani kivaa ja omien tuotosten arvioiminen ja jakaminen toisten kanssa toi oman myönteisen lisänsä tuokiolle.”
> “Moni opiskelija nosti myös esiin sen, että toiminnalliset tunnit olivat olleet mukavia, tai se, että tunnin aikana oli ollut perinteisen matematiikan opiskelun kanssa jokin toiminnallinen tai havainnollinen tehtävä.”

Kurssialustalla nähtävillä oleviin muiden osallistujien kokeiluihin, kokemuksiin ja ajatuksiin perehtyminen koetaan niin ikään hyödylliseksi. Kurssin kouluttajilta saatua kohdistettua tukea ja asiantuntemusta pidetään arvossa. Lisäksi myös kurssille tuotetut materiaalit, kuten asiantuntijavideot, saavat kiitosta.

> “Välillä tuntuu, että omat ajatukset pyörivät samaa kehää, kun omien aineiden yto-opekollegoja ei samassa toimipisteessä ole.”
> “Kiitos kommenteista Seppo ja Sissi! Hyviä huomioita olitte kirjoittaneet, jotka otan ehdottomasti jatkossa käyttöön!
> “Sain videoista hyödyllisen infopaketin oppimisvaikeuksien eri muodoista ja erityisestä tuesta.”

Kiteytettynä kurssille osallistuneet opettajat ovat saaneet eväitä oman opetuksensa kehittämiseen erilaisista tehtävätyypeistä. Esimerkiksi Minä ja matematiikka -kirjoitelmat ovat kirkastaneet opiskelijan kokemia oppimishaasteita. Yhteisöllisen oppimisen menetelmien avulla on pystytty virittämään paremmin matematiikkakeskustelua, ja kielentämistehtävät ovat auttaneet opiskelijoita sanoittamaan ajatteluaan. Muiden esittämät ideat on myös koettu antoisiksi.

4 Millaisia ratkaisuehdotuksia osallistujat esittävät?

Ammatillisissa oppilaitoksissa käytettyjä matematiikan oppimisen tuen keinoja ovat muun muassa tukiopetus, erityinen tuki, henkilökohtainen ohjaus, pienryhmät tai erilaiset pajamallit, kuten treeni- tai opiskeluvalmiuspajat. Sitä on myös samanaikaisopetus, missä erityisopettaja tai ohjaaja on mukana matematiikan tunneilla opettajan kanssa sekä OPVA-opinnot eli *opiskeluvalmiuksia tukevat opinnot*. Lisäksi käytetään eriytettyä materiaalia, tehtävien pilkkomista, apuvälineitä ja mahdollisimman paljon matematiikan liittämistä käytäntöön, arkeen ja opiskelijoiden tulevaan työhön sekä ammattiin. Erityistä tukea tarvitseville oppijoille tyypillisesti suunnattuja tukimuotoja voi myös kokeilla yleisopetuksessa. Kaikki opettajat voivat niitä toteuttaa, ja ne voivat auttaa kaikkia oppijoita.

> “On tosiaankin hyvä motivointikeino liittää opiskeltavat asiat käytäntöön, hakea esimerkit ammattialalta.”
> “Teen välillä esim. kokeita, joissa kysymykset ovat lyhyitä ja tärkeät sanat tai numerot on alleviivattu tai merkitty eri värillä. Myös tehtävien lukeminen ääneen tai siitä keskusteleminen auttaa usein.”

Ammatillisista matematiikan sisällöistä etenkin *lääkelaskut* ovat puhututtaneet opettajia. Lääkelaskut ovat paitsi tärkeä osa sosiaali- ja terveysalan perustutkinnon (lähihoitaja) osaamista, niin myös vaikeiksi koettuja. Kurssin aikana opettajat ovat kokeilleet lääkelaskujen kielentämistä, piirtämistä sekä konkreettisia välineitä (mitat, ruiskut, tabletit). Erityisopettaja on otettu usein mukaan lääkelaskujen opetukseen.

> “Lääkelaskujen tunneilla tarvitaan ehdottomasti enemmän kuin yksi opettaja. Lääkelaskut herättävät opiskelijoissa pahemman luokan matematiikka-ahdistuksen.”
> “Yksikön muunnokset harjoiteltiin taulukon kanssa ja opeteltiin piirtämään se paperille. Myöhemmin opiskelija kuvasi taulukon ymmärtämistä jonkinlaiseksi matematiikan oppien avautumiseksi. Kurssin lopuksi tuli kiittämään ja kertoi, että on elänyt siinä uskossa, ettei hallitse matematiikkaa, mutta nyt uskoo kykyihinsä. Sai suoritettua lääkelaskut virheettömästi.”

Opettajien kokemusten mukaan opiskelijan yksilöllinen kohtaaminen on ollut parasta lääkettä oppimiselle. Lisäksi oppimiselle tarvittavaa ajan käyttöä on korostettu.

> “Parhaita tuloksia olen saanut niillä kursseilla, joilla minulla on ollut aikaa räätälöidä jokaiselle opiskelijalle "omat tehtävät" ja ehtinyt auttamaan jokaista välillä kädestä pitäen eli tehtävien vaiheistamista, sanallistamista ja tarvittaessa myös apuvälineitä käyttäen.”
> “Itse olen huomannut, että opiskelija, joka ei isossa ryhmässä etene lainkaan, pääsee erityisopettajan kanssa etenemään ihan eri vauhdilla. Ja syy tähän varmaan se, että erityisopettaja pystyy tarjoamaan pienryhmässä "vierihoitoa" eli voi olla tukemassa heti kun homma jumittuu.”
> “Jos ei ole aikaa opettaa kunnolla, on oltava aikaa opettaa uudelleen."

Tynjälän (2002) mukaan vaihtelevat ja monipuoliset oppimistehtävät herättävät opiskelijoiden kiinnostusta paremmin kuin samanlaisina toistuvat. Erilaisista asioista pitävien opiskelijoiden on hyvä päästä tekemään mieltymystensä mukaisia tehtäviä. Mielekkäät ja henkilökohtaisesti merkitykselliset tehtävät ovat kiinnostavimpia; esimerkiksi todellisen elämän ongelmien ratkaisut, harrastuksiin liittyvät tehtävät sekä omaan kokemusmaailmaan kiinteästi liittyvät asiat. (Tynjälä, 2002.) Sekä tason suhteen sopivien että arkeen kytkeytyvien tehtävien valinta auttaa opiskelijoita säilyttämään motivaationsa:

> “Sekin motivoi, että saa tehdä itselle sopivantasoisia tehtäviä. Ei tule turhautumista, kun ei tarvitse kokea koko ajan osaamattomuutta ja toisille taas riittää haastetta eikä tarvitse jumittaa jo opituissa asioissa.”
> “Mielestäni oppilaiden kiinnostusta voidaan herättää matematiikkaa kohtaan, kun linkitetään ne arkipäivän tilanteisiin.”

Osallistujien tarinoihin sisältyy haasteellisten tilanteiden rinnalla onneksi myös onnistumisen kokemuksia. Parhaassa tapauksessa ammatillisen matematiikan opettaja onnistuu kehittämään oppimisprosessin, jonka tuella opiskelija kykenee murtautumaan oppimisen esteiden läpi. Hänessä herää innostus, jolla saattaa olla kauaskantoinen merkitys.

> “Hänet siirrettiin opiskeluvalmiuksien pajaan, jossa minä opetin kaksi päivää viikossa matematiikkaa. Kurssille rakennettiin selkokielinen materiaali. Hän suoriutui matematiikasta erinomaisin arvosanoin ja oli ihanaa nähdä, miten hän loisti tunneilla, osallistui aktiivisesti ja kyseli kaikkea - halusi todella oppia. Aiemmin hän oli hyvin syrjäänvetäytyvä ja surullinen.”

Banduran (1997) mukaan myönteiset kokemukset matematiikan oppimisessa ja siihen liittyvien taitojen kehittyminen voivatkin parantaa opiskelijan *minäpystyvyyttä*, hänen arviotaan omasta selviytymisestään. (Korpipää, Koponen, Pesu & Lerkkanen, 2020) Myönteisten matematiikkakokemusten merkitys on suunnaton.

5 Yhteenveto

Osallistujat kertovat pääsääntöisesti siitä, että heidän opiskelijoidensa matematiikan osaamisen lähtötaso on huolestuttavan alhainen. Taustalla on yleensä oppimisvaje, joka on kasautunut jopa koko kouluajalta. Osaamisvajeen paikkaaminen ammatillisen koulutuksen lyhyehkössä matematiikan opetuksessa on usein hyvin haastavaa. Lisäksi maahanmuuttajataustaisten opiskelijoiden tavanomainen haaste on heikohko suomen kielen taito. Opetusresurssien puute suhteessa näihin haasteisiin on opettajien tavallinen kokemus ja murheenaihe.

Opettajat toivovat Lumatikka-kurssilta työkaluja kuvattuihin haastaviin tilanteisiin. Tämän rinnalla esitetään välillä myös toive yhteisestä jakamisesta ja keskustelusta, vaikka osallistujien välille on syntynyt varsin vähän varsinaisia keskusteluja, johtuen kurssin pienehköstä osallistujamäärästä ja osallistujien eritahtisesta etenemisestä kurssilla. Kurssin kuluessa tuntuu kuitenkin syntyvän oivalluksia; esimerkiksi opettajien omien opiskelijoiden kirjoitelmat saattavat avata silmiä vaikkapa huomaamaan heidän kielteisiä kokemuksiaan matematiikan opiskelusta. Silloin on mahdollista koettaa tarttua tilanteeseen kehittävällä otteella.

Lähteet

Ammatillisen koulutuksen perustutkinto. (30.4.2022). *Tutkinnon osat. Matematiikka ja matematiikan soveltaminen.* https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/esitys/3328283/reformi/tutkinnonosat/4181937

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* New York: W. H. Freeman and Company.

Beilock, S.L. & Willingham, D.T. (2014). Math anxiety: Can teachers help students reduce it? Ask the cognitive scientist. *American Educator, 38* (2), 28-32. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1043398.pdf

Furner, J.M. (2017). Teacher and Counselors: Building Math Confidence in Schools. *European Journal of STEM Education 2*(2), 1–10.

Huhtala, S. & Laine, A. (2004). *"Matikka ei ole mun juttu": Matematiikkavaikeuksien syntyminenja niihin vaikuttaminen.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti, 320–346.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa.* Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.), Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja Ainedidaktisia tutkimuksia 8, 45–62.

Korpipää, H., Koponen, T., Pesu, L. & Lerkkanen, M-K. (2020). *Minäuskomukset ja matematiikan oppiminen.* https://www.jyu.fi/edupsy/fi/tutkimus/hankkeet-projects/matematiikan-maailmaan/tietomateriaalit/minauskomukset-ja-matematiikan-oppiminen-1.pdf

Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. *Dimensio.* Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti. https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/#_endref7

Tynjälä, P. (2002). Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Tammi.

Matematiikan ja musiikin yhdistäminen opetuksessa

Anssi Korhonen

Itä-Suomen yliopiston LUMA-keskus, Luonnontieteiden ja metsätieteiden tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Matematiikka ja musiikki kulkevat käsi kädessä. Musiikista löytyvät murtoluvut ja niiden laskutoimitukset, jaollisuus, lukujonot sekä jopa logaritmit ja eksponentit. Tällöin myös opetuksessa matematiikan ja musiikin yhdistäminen on mahdollista ja antaa uutta näkökulmaa sekä konkretiaa perinteisen laskupainotteisen oppitunnin rinnalle. Artikkelissa laajennetaan LUMATIKKA3: matematiikka ja taide -kurssilla esiteltyjä matematiikan ja musiikin yhtäläisyyksiä muun muassa aivotoimintaan sekä tarkemmin eri menetelmiin matematiikan ja musiikin yhdistämisestä niin alakoulun, yläkoulun kuin myös lukion opetuksessa.

Avainsanat: murtoluvut, aika-arvot, tahtilajit, intervallit, ääniaallot, logaritmit, eksponentit, matematiikan opetus, monialainen opetus, eheyttävä opetus

Yhteystiedot: anssi.korhonen@uef.fi

1 Johdanto

Miten matematiikka ja musiikki liittyvät toisiinsa? Usein matematiikka mielletään formaalina tieteenä, kun taas musiikki on yksi ilmaisevista taiteenmuodoista. Nämä kaksi ovat kuitenkin vahvasti linkittyneet toisiinsa molempien tieteenalojen historian ajan. Jo Pythagoras havaitsi, kuinka värähtelevän kielen pituus on kääntäen verrannollinen sen tuottamaan äänen korkeuteen, eli mikäli kielen pituus puolitetaan, niin sävelkorkeus nousee oktaavilla (Apiola, 2015). Myös kuuluisa muusikko J.S. Bach tutki matemaattista ongelmaa löytää käytännöllinen tapa virittää kosketinsoittimia (Wright, 2009, s. 5). Matematiikan avulla kuvataan monia musiikin ilmiöitä, kuten kielten värähtelyä tietyillä aallonpituuksilla (Shah, 2010, s. 7). Lisäksi tarkemmin ajateltuna, nuottien aika-arvot vastaavat murtolukuja ja tahtilajien kautta suoritetaan murtolukujen yhteenlaskuja (Marjanen, 2013, s. 28). Nuottiviivasto, johon nuotit ja tahtilajit sijoitetaan, on puolestaan omanlaisensa koordinaatisto (Shah, 2010, s. 17).

Voidaan puhua myös matematiikan ja musiikin yhtäläisyyksistä aivotoiminnassa, ja siitä, kuinka musiikin harjoittaminen vahvistaa matemaattista osaamista. Neurologisesti tarkisteltuna näillä kahdella on yhteys, sillä musiikin käsittely tapahtuu lähekkäisillä tai samoilla aivon alueilla kuin tiettyjen matemaattisten ongelmien tehtävien suorittaminen. Tätä väitettä on myös kritisoitu, sillä musiikin ei ole nähty vaikuttavan kaikkiin matematiikan osa-alueisiin tai älykkyyteen yleisesti. Musiikin kuuntelun on kuitenkin todettu vahvistavan niitä hermoratoja, joita ihminen käyttää esimerkiksi ongelmanratkaisuun tai avaruudelliseen hahmottamiseen. Tällöin aktiivisen musiikin kuuntelun vahvistaessa näitä hermoratoja, johtaa se myös parempiin taitoihin muun muassa avaruudellista hahmottamista vaativissa ongelmanratkaisussa. (Kaperi, 2020, s. 19–21.)

Musiikin kuuntelu jo raskauden aikana on todettu aiheuttavan sikiön aivoissa positiivisia muutoksia. Esimerkiksi, kun äidit kuuntelevat raskauden aikana musiikkia, on heidän lastensa huomattu syntymän jälkeen reagoivan puheeseen enemmän, kuin sellaisten lasten, joiden äiti ei ollut kuunnellut raskaana ollessaan musiikkia. Yleisestikin musiikillisen aktiivisuuden on havaittu hyödyttävän lasten aivotoimintaa. Se auttaa lapsen kuulokyvyn kehittymistä, kuten kuullun muistamista ja äänien ominaisuuksien erottelua, sekä kielellistä kehittymistä esimerkiksi sanavaraston kasvattamisen kannalta. Lisäksi jo vastasyntyneellä lapsella on kyky musiikin käsittelyyn ja sointujen erotteluun. Tämän pohjalta on perusteltua sanoa, että jo varhaiskasvatuksessa musiikin integrointi esimerkiksi matematiikan opetukseen on lapsen oppimisen kannalta hyödyllistä. (Kaperi, 2020, s. 21–22.)

Myös muusikoiden ja ei-muusikoiden aivorakennetta sekä aivojen toimintaa on tutkittu ja havaittu, että muusikoiden aivot ovat rakenteeltaan kehittyneemmät kuin ei-muusikoiden. On myös tutkittu, että muusikoiden aivot prosessoivat tehokkaammin tietoa ja niillä on paremmat edellytykset muistamiselle ja muistista palauttamiselle. (Kaperi, 2020, s. 22.)

Musiikin kuunteleminen ja musiikin luominen, esimerkiksi soittamalla jotain soitinta, kehittää lukuisia kognitiivisia toimintoja aktivoimalla aivoalueita, jotka ovat kognitioiden kannalta tärkeitä. Kognitiivisten taitojen kehittymisen lisäksi musiikin on tutkittu kehittävän myös keskittymiskykyä. Tällöin musiikin sisällyttäminen niin peruskoulun kuin lukionkin tunneille on perusteltua. Kuitenkin musiikin vaikutus suorasti esimerkiksi yleiseen oppimiseen ja akateemisten taitojen kehittämiseen on vielä avoin. (Kaperi, 2020, s. 31.)

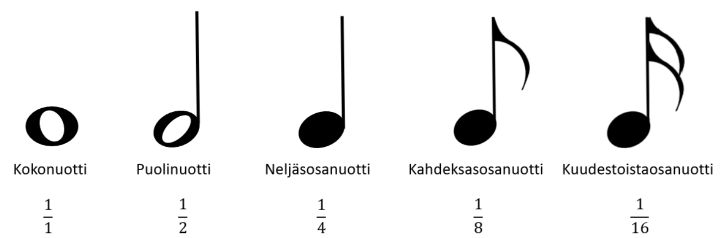
Tässä artikkelissa kuvataan musiikin ja matematiikan yhtäläisyyksiä teorian tasolla sekä annetaan ideoita näiden kahden integroimiseen niin varhaiskasvatuksen, alakoulun, yläkoulun kuin myös lukion opetuksessa. Artikkelin ensimmäisessä luvussa käsitellään yleisimmät nuottien aika-arvot, niiden symbolit sekä yhteydet murtolukuihin. Sisältö on tarkoitettu erityisesti peruskoulutasolle. Sen jälkeen siirrytään tahtilajit ja rytmi -lukuun, joka sisältää teoriaa tahtilajeista ja niiden yhteydestä matematiikkaan laskemisen, murtolukujen sekä muun muassa jaollisuuden muodossa. Kyseisen luvun asiat on suunnattu lähinnä varhaiskasvatukseen sekä peruskouluun.

Neljännessä luvussa siirrytään tutkimaan nuottiviivastoa ja intervalleja. Luku selittää teorian tasolla sävelten taajuuksia ja niiden suhteita eli intervalleja. Lisäksi käydään läpi sitä, miten intervalleja voidaan hyödyntää logaritmeihin ja lukujonoihin sekä yleisimpien intervallien määritelmiä. Tämän luvun asiat sopivat parhaiten lukiotasolle, mutta myös peruskouluasteen opetukseen voi saada inspiraatiota.

Artikkelin toiseksi viimeisessä kappaleessa käsitellään kielen värähtelyä, jossa käydään teorian tasolla taajuuksia ja sitä myöten muun muassa sitä, mihin kielisoittimien toiminta perustuu. Teorian jälkeen on havainnollistavia tehtäviä taajuuksien tutkimiseen. Kappaleen teoriaosuus soveltuu enimmäkseen lukioon, mutta siitä saa myös ideoita peruskoulun opetukseen. Havainnollistavat tehtävät sisältävät vinkkejä myös varhaiskasvatukseen ja peruskoulun pienemmille oppijoille. Viimeisenä kerrotaan lopuksi ääniaalloista sinifunktion muodossa ja sitä kautta käydään läpi sitä, miten trigonometriset funktiot toimivat. Havainnollistava äänitystehtävä tutkimuksineen on myös sovellettavissa peruskouluun, vaikka teoriapuoli painottuukin lukion matematiikkaan. Kokonaisuudessaan artikkeli pohjautuu LUMATIKKA-koulutuksen järjestämän Matematiikka ja taide -kurssin *Matematiikka ja musiikki* -osioon, jonka tämän artikkelin kirjoittaja on koostanut.

2 Nuottien aika-arvot ja murtoluvut

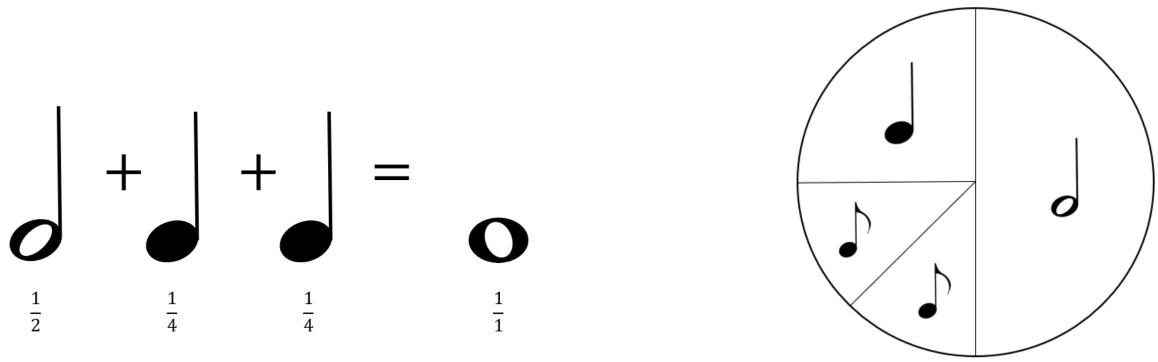
Nuottien sekä murtolukujen opiskelun voi kätevästi integroida keskenään. Mikäli kuitenkin murtoluvut ja niillä laskeminen ovat jo ennestään tuttuja, nuottien käsitteiden opettaminen käy murtolukujen kertaamisena. Yleisimmät käytettävissä olevat nuotit ovat *kokonuotti*, *puolinuotti*, *neljäsosanuotti* sekä *kahdeksasosanuotti*. Kahdeksasosanuotin jälkeen, kun nuotin *aika-arvo* puolitetaan, lisätään nuottiin uusi väkänen edellisen alle. Näiden symbolit löytyvät kuvasta 1. (Wright, 2009, s. 18–19.)



Kuva 1. Yleisimpien nuottien symbolit, nimet sekä niitä vastaavat murtoluvut.

Kun nuotteja lasketaan yhteen, kuten kuvassa 2a on tehty, tapahtuu se samalla tapaa kuin murtolukujen yhteenlasku. Hyvänä havainnollistuskeinona voi käyttää kuvan 2b kaltaista, murtolukujen yhteydestä oppilaille usein tuttua *piirakkamallia*, jossa koko piirakka vastaa kokonuottia, puolikas puolinuottia ja niin edelleen. Piirakkamallia voi käyttää myös eräänlaisena palapelitehtävänä. Muita hyödyllisiä tehtäviä murtolukujen ja nuottien oppimiseen ovat yhdistelytehtävät, joissa tehtävänannossa on kuvattuna nuottien symbolit, niiden nimet ja murtolukumerkinnät, kuten kuvassa 1, mutta sekoitetussa järjestyksessä. Tämän jälkeen oppilaan tehtävänä voi olla yhdistää symboli oikeaan nimeen ja murtolukumerkintään. Nuottisymbolien avulla on mahdollista rakentaa ja havainnollistaa helposti erilaisia laskuja, joiden avulla nuotit tulevat tutuksi ja laskutaidot murtoluvuilla syvenevät. (Marjanen, 2013, s. 24–28.)

2a 2b

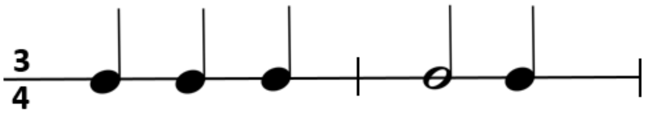


Kuva 2. Esimerkkilasku nuottien avulla sekä piirakkamalli nuottien aika-arvoista suhteellisina osuuksina

3 Tahtilajit ja rytmi

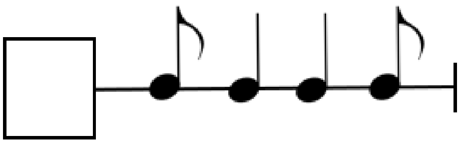
Kun nuotteja sijoitetaan *nuottiviivastolle*, määrää *tahtilaji* sen, kuinka paljon ja millaisia nuotteja yhteen tahtiin mahtuu. Tahtilajin kertoo *tahtiosoitus*, joka löytyy merkittynä kappaleen alussa, kuten kuvassa 3. Yleisimmät tahtilajit ovat $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ ja $\frac{6}{8}$. Tahtilajimerkinnässä osoittaja kertoo sen, kuinka monta nuottia tahtiin mahtuu ja nimittäjä sen, millaisia nämä nuotit ovat. Esimerkiksi tahtilajissa $\frac{2}{4}$ yhteen tahtiin mahtuu kaksi neljäsosanuottia. Tahdin voi myös täyttää muilla nuoteilla, kunhan tahdin mitta ei muutu. (Shah, 2010, s. 22–23.)

Tahtilajien ymmärtämisen havainnollistamiseen voidaan käyttää esimerkiksi kartonkipaloja, jotka ovat leikattu leveydeltään nuotin aika-arvoa vastaavaksi; kokonuotti on leveydeltään suurin, puolinuotti leveydeltään puolet kokonuotin palasta ja niin edelleen. Tämän jälkeen taululle voidaan piirtää nuottiviivasto esimerkiksi tahtilajilla $\frac{2}{4}$ ja mitoitettuna niin, että siihen mahtuu yksi puolinuottia vastaava kartonkipala. Tällöin kokonuotti ei mahdu tähän tahtilajiin, mutta esimerkiksi neljä kahdeksasosanuottia täyttää tahtilajin täydellisesti.



Kuva 3. Tahtilaji $\frac{3}{4}$ ja sen mukaisesti kaksi esimerkkitahtia.

Oppilaiden kanssa tahtilajin ja tahdin ymmärtämiseen voi käyttää myös erilaisia laskuvariaatioita. Oppilaat voivat selvittää tahtilajeja esimerkiksi siten, että tahti on täytetty erilaisilla nuoteilla valmiiksi ja heidän tulee laskea nuottien aika-arvot yhteen (Işıtan & Doğan, 2020, s. 103–104). Konkreettisena apukeinona ratkaisemiseen voi käyttää esimerkiksi yllä mainittua nuottien havainnointimenetelmää kartonkipaloilla. Tästä yksi esimerkki löytyy kuvasta 4.



Kuva 4. Esimerkki tehtävästä, jossa ratkaistaan tahtilaji.

Tahtilajeja opettaessa voidaan ottaa avuksi mukaan *rytmi*, vaikka yksinkertaisesti taputtaen. Rytmi itsessään koostuu peräkkäisistä nuoteista ja tauoista, jotka tahtilaji jakaa saman mittaisiin tahteihin (Tamminen, 2015). Erityisesti pienempien oppijoiden kanssa musiikin rytmin hahmottamisessa on tärkeää kehon mukaan ottaminen ja tahdin mukaan liikkuminen vaikka tanssien tai muun musiikkiliikunnan kautta (Musiikkimatka.fi, 2022).

Yksinkertaisin tapa lähteä tekemään rytmiharjoituksia on käyttää alkuun vain neljäsosa- ja kahdeksasosanuottia. Näistä perussykkeenä toimii neljäsosanuotti, joka luetaan ”TAA”. Kahdeksasosanuotti luetaan puolestaan ”TI”. (Niemelä, 2015, s. 39.) Tällöin tahti, joka sisältää alkuun kaksi neljäsosanuottia, sitten kaksi kahdeksasosanuottia ja lopuksi vielä yhden neljäsosanuotin, luetaan ”TAA-TAA-TI-TI-TAA”.

Rytmejä harjoitellessa voi luokan ja ryhmän kanssa sopia, että esimerkiksi neljäsosanuotti taputetaan käsin, kahdeksasosanuotti rintakehään ja puolinuotti reisille.

Näin laskemiseen saadaan keho mukaan monipuolisemmin. (Fagerlund, 2020, s. 25.) Lisäksi ääneen laskeminen tehostaa rytmin sisäistämistä ja pienemmille luvut tulevat samalla tutummaksi. Käyttämällä eri tahtilajeja saadaan variaatioita laskemiseen ja aiheen ymmärrystä syvennettyä.

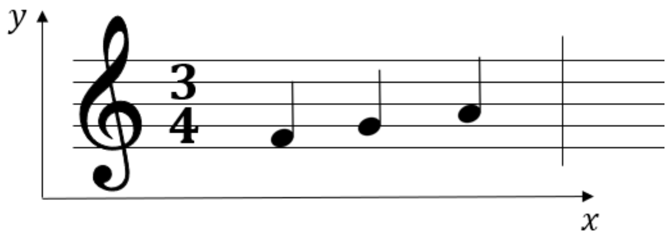
Rytmiä, tahtilajeja ja rytmitajua voi harjoitella myös *kaikuharjoituksena*. Tässä opettaja taputtaa ensin yksin jonkun rytmin, johon oppilaat vastaavat kaikuna. Kun rytmit sujuvat opettajajohtoisesti, voivat oppilaat tehdä kaikuharjoituksen pareittain. Toinen parista luo rytmin, johon pari kaikuna vastaa. Näin oppilaat pääsevät itse käyttämään luovuuttaan. (Musiikkimatka.fi, 2022.) Lisäksi omien sävellysten ja rytmien tekeminen kehittää tutkitusti lapsen ongelmanratkaisukykyä, kuten johdannossa todettiin. Myöhemmin, kun taputtaminen sujuu hyvin, voidaan rytmiin yhdistää laulun lyriikoita ja loruja, joiden avulla tuetaan myös verbaalista kehitystä ja tavuttamisen hahmottamista (Rajala, 2016). Kehon lisäksi voidaan käyttää itsetehtyjä rytmisoittimia, kuten kapuloita ja rytmimunia, jotta oppimiseen saadaan vielä enemmän mielekkyyttä. (Musiikkimatka.fi, 2022).

Sarjojen, pienimmän yhteisen tekijän ja jaollisuuden alkeiden opettamiseenkin voi hyvin käyttää rytmiä ja sitä myöten kehoa. Tähän teemaan liittyvässä harjoituksessa luokka jaetaan kahteen ryhmään. Ryhmän A oppilaat taputtavat tahtilajiin $\frac{3}{4}$ siten, että ensimmäinen tahti taputetaan reisiin, toinen rintakehään ja kolmas kädet vastakkain. Toinen ryhmä B taputtaa tahtilajiin $\frac{2}{4}$ niin, että ensimmäinen taputetaan reisiin ja toinen kädet vastakkain. Ryhmät jatkavat omien tahtiensa taputtamista jonkin aikaa samassa rytmissä. Tällöin huomataan, että kädet vastakkain taputukset kohtaavat ryhmän B kolmannen tahdin jälkeen ja ryhmän A toisen tahdin jälkeen. Tästä saadaan pääteltyä, että lukujen kaksi ja kolme *pienin yhteinen tekijä* on kuusi. Ryhmän kanssa voidaan yhdessä miettiä, miksi näin tapahtuu ja mitä yhteistä luvulla kaksi ja kolme tällöin on. Tehtävää voi myös tehdä pareittain tai pienryhmissä erityisesti silloin, jos opetettava ryhmä on suuri. (Summamutikka, 2022.)

4 Nuottiviivasto ja intervallit

4.1 Nuottiviivasto

Nuottiviivaston avulla saadaan musiikkiin liitettyä *melodia* rytmin lisäksi. Se voidaan käsittää *koordinaatistona*, jossa x-akseli kuvaa ajan kulkua ja y-akseli *sävelkorkeutta*, kuten kuvassa 5 on esitetty (Shah, 2010, s. 17). Nuottiviivasto käsittää viisi viivaa, jotka ovat tasaisin välimatkoin toisistaan, sekä *G-nuottiavaimen*, joka osoittaa koukerollaan G-sävelen paikan. Lisäksi nuottiviivastolle merkitään jo aiemmin opittu tahtilaji. Nuotteja voidaan sijoittaa niin viivojen väliin kuin viivojen päälle, kuten kuvassa 6. (Wright, 2009, s. 4–5.)



Kuva 5. Nuottiviivasto, johon on lisätty havainnollistamaan xy-koordinaatisto. X-akseli kuvaa aikaa ja y-akseli sävelkorkeutta. Ennen tahtilajia on nähtävissä G-nuottiavain.

Kuva 6. Sävelet ja niiden sijoittuminen nuottiviivastolle. Numero sävelen perässä kertoo oktaavialan.

Nuottiviivastolla olevan sävelen sävelkorkeuden määrittää sen tuottama *taajuus*. On esimerkiksi sovittu, että nuotin A1 taajuus on 440 Hz, kun sen sijainti on kuvan 7 mukaisesti keski-C:n yläpuolella. (Wright, 2009, s. 4.)

Kuva 7. Taajuudella 440 Hz soivan A-nuotin sijainti nuottiviivastolla.

Säveltenkorkeuksien eroa toisistaan kutsutaan *intervalleiksi*, joista yleisin lienee *oktaavi*. Oktaavilla tarkoittaa kaksinkertaista taajuuseroa sävelkorkeuksissa. Taajuuden yksikkö on hertsi (Hz) eli $\frac{1}{sekunti}$. Yllä mainittiin nuotin A1 taajuudeksi 440 Hz, jolloin oktaavia ylempänä olevan A2 nuotin taajuus on $2 \cdot 440\ Hz = 880\ Hz$. Toisaalta oktaavia alempana olevan A:n taajuus on $\frac{1}{2} \cdot 440\ Hz = 220\ Hz$. Tärkeää huomata, että intervallien ero on nimenomaan taajuuksien suhteessa, ei erotuksessa. Kahden taajuuden f_1 ja f_2 suhde r saadaan laskettua kaavalla $r = \frac{f_1}{f_2}$. (Wright, 2009, s. 45–46.)

Yksi oktaavi on jaettu 12 *puolisävelaskeleeseen*. Tämä on havaittavissa selkeimmin pianon koskettimista, kun lasketaan esimerkiksi kahden C:n välissä olevat valkeat ja mustat painikkeet, kuten kuvassa 8.

Kuva 8. Pianon koskettimet, soinnut sekä oktaavi, joka on jaettu 12 puolisävelaskeleeseen. Merkintä # tarkoittaa puolisävelaskeleen korotusta nuottiin.

Tämän tiedon avulla saadaan laskettua muiden sävelten taajuudet. Oletetaan nyt yhden puolisävelen välisen taajuussuhteen olevan r. Lisäksi tiedetään, että oktaavin päässä toisistaan olevan soinnun taajuuksien välinen suhde on 2. Koska oktaavin välissä puolisäveliä on 12, saadaan muodostettua kaava $r^{12} = 2$, jolloin $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$. Näin on ratkaistu suhdeluvun yhden puolisävelen välille. Tällöin x määrälle puolisäveliä saadaan suhde $(2^{\frac{1}{12}})^x = 2^{\frac{x}{12}}$. Tätä kutsutaan *tasavireiseksi asteikoksi*. Tasavireistä asteikkoa käytetään muun muassa pianon virittämiseen. (Wright, 2009, s. 47.)

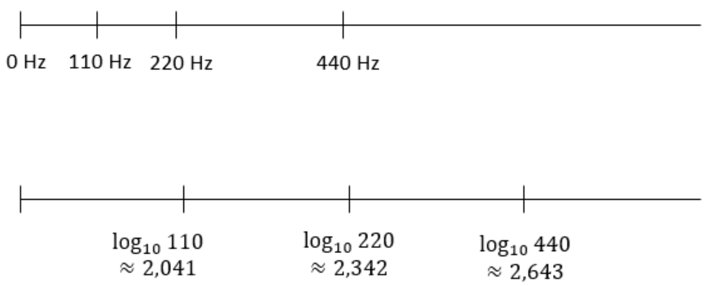
Voidaan laskea esimerkiksi neljän puolisävelen välin suhde, joka on $2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}25992$. Esimerkiksi nuotin A1 taajuuden ollessa 440 Hz, on neljän puolisävelen päässä korkeammalla olevan nuotin C#2 taajuus $440\ Hz \cdot 1{,}25992 = 554{,}365\ Hz$. Alempien taajuuksien laskemiseen pätee sama kaava. Mikäli lasketaan neljän puolisävelen päässä matalammalla olevan nuotin taajuutta, vaihdetaan x:n tilalle -4, eli $2^{-\frac{4}{12}} = 2^{-\frac{1}{3}} = 0{,}793701$. Tällöin nuotin F1 taajuus on $440\ Hz \cdot 0{,}793701 = 349{,}228\ Hz$.

Tästä asiasta on mahdollista luoda vanhemmille oppijoille soveltavia tehtäviä. Esimerkiksi oppilaille voidaan näyttää nuottiviivastolta jokin sointu ja pyytää heitä laskemaan tämän taajuus, kun tiedetään vaikkapa A1-nuotin taajuuden olevan 440 Hz. Lisäksi yhtälöä voidaan käyttää myös toiseen suuntaan, jolloin tehtävänannossa voidaan antaa valmiiksi jokin taajuus ja oppilaan tulee laskea, mikä nuotti on kyseessä. Myös yhteisenä tutkimuksena voidaan johtaa yllä oleva kaava, jonka avulla saadaan laskettua puolisävelten välisiä taajuuseroja.

4.2 Intervallit logaritmeissa sekä lukujonoissa

Intervalleista saa *logaritmeihin* liittyviä harjoitteita muokkaamalla potenssilaskut käänteiseksi. Lisäksi logaritmien oppimisen ymmärtämiseen voidaan käyttää sävelten taajuuksien suhteita. Kuten aiemmin mainittiin, sävelpareilla, joilla on sama intervalli, on myös sama taajuuksien välinen suhde. Tällöin esimerkiksi sävelen A oktaavien taajuuksille pätee $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A4}{A3}$. Nyt hyödyntämällä logaritmien laskusääntöjä, saadaan $\log_b A_2 - \log_b A_1 = \log_b A_4 - \log_b A_3$, eli logaritmisella skaalalla oktaavien taajuudet sijoittuvat täsmälleen samalle etäisyydelle toisistaan. Tätä havainnoi kuva 9. (Wright, 2009, s. 55–56.)

Tästä saadaan hyvä yhteys myös lukujonoihin. Nyt intervallien ollessa taajuuksien suhteita, huomataan, että saman intervallin päässä toisistaan olevien taajuuksien muodostavan *geometrisen jonon*. Eli esimerkiksi oktaavit muodostavat geometrisen jonon, jossa jonon jäsenen suhde edelliseen on kaksinkertainen. Kun intervallit muutetaan logaritmiselle skaalalle, saadaan aikaan *aritmeettinen lukujono*, jossa peräkkäisten jonon jäsenten erotus on aina vakio. (Vatanen, 2015, s. 17, 21.)



Kuva 9. Ylemmällä suoralla sävelen A oktaavien taajuudet ja alemmalla suoralla samojen taajuuksien 10-kantaiset logaritmit.

4.3 Yleisimmät intervallit

Kahden eri sävelen välistä korkeuksien eroa siis kutsutaan *intervalliksi*. Ehkä tunnetuimman intervallin, oktaavin, käsite käytiin tarkemmin edellisessä alaluvussa. Sen lisäksi muita tavallisia intervalleja ovat *priimi*, *sekunti*, *terssi*, *kvartti*, *kvintti*, *seksti* ja *septimi*. Näistä intervalleista esimerkit ovat nähtävissä taulukossa 1. Priimiä, kvarttia, kvinttiä ja oktaavia kutsutaan *puhtaiksi intervalleiksi*, kun taas sekunti, terssi, seksti ja septimi ovat *suuria intervalleja*. (Wright, 2009, s. 6.)

Taulukko 1. Intervallit sekä niille esimerkkisävelväli.

Intervalli	Esimerkkisävelväli
Priimi	C1-C1
Sekunti	C1-D1
Terssi	C1-E1
Kvartti	C1-F1
Kvintti	C1-G1
Seksti	C1-A1
Septimi	C1-H1
Oktaavi	C1-C2

Vähennetyt intervallit ovat sävelaskelmiltaan suppeampia kuin puhtaat tai *pienet intervallit*. Eli esimerkiksi *vähennetty kvintti* sisältää kuusi puolisäveltä, kuten välin H-F, kun puhdas kvintti sisältää seitsemän, kuten väli C-G. (Opipistenuotteja.fi.).

Pienet intervallit ovat yhden puolisävelen suppeampia kuin suuret. Tällöin esimerkiksi pieni sekunti on väli E-F, sisältäen yhden puolisävelen, kun taas suuri sekunti on väli G-A, joka sisältää kaksi puolisäveltä. *Ylinousevat intervallit* ovat yhden puolisävelen laajempia kuin puhtaat tai suuret intervallit. Tällöin väli C-G# on esimerkiksi ylinouseva kvintti, eli sisältää kahdeksan puolisäveltä. (Opipistenuotteja.fi.).

Intervallien määritelmien avulla oppilaille voidaan muodostaa haastavampia sanallisia laskutehtäviä, joilla kehitetään myös luetun ymmärtämistä. Esimerkiksi tehtävässä voidaan antaa esitietona H-sävelen taajuus, puhtaan kvintin määritelmä ja tiedustella tältä pohjalta tasavireisesti viritetyn pianon antamaa taajuutta sävelestä, joka on puhtaan kvintin päässä annetusta H-sävelestä.

5 Kielen värähtely

Pythagoras, joka on varmaan useammalle tuttu suorakulmaisten kolmioiden kautta, tutki aikanaan paljon myös kielten värähtelyä sekä näin aikaan saatuja taajuuden muutoksia. Hän huomasi, että soittimen kielen pituuden puolittamalla saadaan nostettua sen sävelkorkeus oktaavilla ylemmäs. Tästä saatiin johdettua teoria, jonka mukaan kielen taajuus on *kääntäen verrannollinen* sen pituuteen, eli $f \propto \frac{1}{l}$. Tällöin taajuuden f ja kielen pituuden l suhde saadaan ilmaistua yhtälöllä $f = \frac{k}{l}$, missä k on jokin positiivinen vakio. Tämä ilmiö huomataan parhaiten kielisoittimissa, kuten viulussa, jossa soittaja painaa kielen otelautaa vasten ja saa näin aikaan eri taajuuksista säveltä muuttamalla kielen pituutta. (Wright, 2009, s. 50.)

Tästä johtamalla voidaan muodostaa kaava, jonka avulla saadaan laskettua kohta, josta kieltä tulee painaa, jotta saadaan muodostettua esimerkiksi suuri terssi. Tällöin, jos kielen pituus on l, niin muuttamalla kielen pituutta saadaan uudeksi pituudeksi ql, missä q on jokin positiivinen kerroin. Näin ollen laskemalla taajuuksien suhteet, saadaan $r = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{k}{ql}}{\frac{k}{l}} = \frac{l}{ql} = \frac{1}{q}$, jolloin $q = \frac{1}{r} = r^{-1}$. (Wright, 2009, ss. 50–51.)

Hyödyntämällä aiempia tuloksia, tiedetään, että suuren terssin taajuuden suhde $r = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$, jolloin $q = (2^{\frac{1}{3}})^{-1} \approx 0{,}8$. Tällöin halutessamme soittaa suuren terssin täytyy sormi asettaa otelaudalle niin, että alkuperäisestä kielen pituudesta soi $\frac{4}{5}$.

Tätä on helppo havainnoida oppilaiden kanssa, jolloin opetukseen ja laskuihin saadaan konkreettisuutta. Havainnointi voidaan suorittaa mittaamalla esimerkiksi kitaran E-kielen pituus, jonka jälkeen lasketaan haluttu uusi pituus. Kuvassa 10 nähdään, että kitaran paksun E-kielen pituus on 66 cm. Jos halutaan löytää suuri terssi suhteessa vapaasti soivaan E-kieleen, tehdään laskutoimitus $66\text{ cm} \cdot \frac{4}{5} = 52{,}8\text{ cm}$. Kuvasta 10 huomataan, että 52,8 cm kohdalla on neljäs *otenauha*. Siis painamalla sormella neljättä väliä soi kitaran E-kielestä 52,8 cm pituinen osa ja saadaan G#-sävel. Oppilaiden kanssa voidaan soittaa vielä vapaata E-kieltä ja uuden pituuden tuottamaa taajuutta, eli G#-säveltä. Verrokkina voi tuottaa vastaavat sävelet vaikkapa pianolla.

Kuva 10. Kitaran kaula ja kielien pituudet.

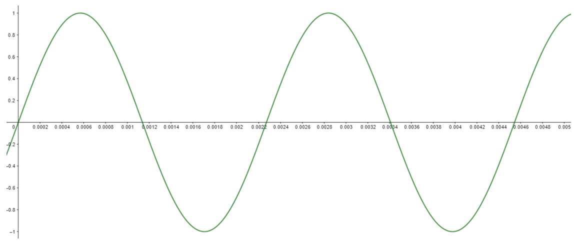
Pienempien oppijoiden kanssa taajuuksia ja sävelkorkeuksien suhteita voi tutkia tekemällä yhdessä omat soittimet vedellä täytettyjen juomalasien tai pullojen avulla. (ks. Ellington NHS, 2020). Kaatamalla eri määriä vettä samanlaisiin laseihin, ja napauttamalla niitä lusikalla, saadaan aikaan eri taajuuksia. Tässä tapauksessa mitä enemmän vettä laseissa on, sitä matalampi taajuus saadaan aikaan, sillä tällöin lasi värähtelee hitaammin. Laseihin voi halutessaan lisätä väriainetta, jolloin se voi auttaa joitain oppilaita hahmottamaan vesimäärät vielä paremmin. Lisäksi laseja voi kokeilla napauttaa eri materiaalista tehdyillä esineillä, kuten metallilusikalla, muovilusikalla ja puisella kapulalla. Oppilaat voivat näin mukavalla tavalla tehdä omaa musiikkia, ja samalla oppia taajuuksien alkeita sekä mittaamista ja määriä. (How to Make Science Projects for Kids, 2013.)

Toinen vastaava tapa tehdä musiikkia helposti, sekä tutkia samalla äänentaajuuksien eroja, on käyttää pulloja tai koeputkia ja puhaltaa niihin (Oppimateriaalikeskus OPIKE, 2012, s. 16). Tällöin sävel syntyy pulloon muodostuvan ilmapatsaan kautta. Tyhjä pullo synnyttää matalan äänen, kun taas vettä lisäämällä äänen taajuutta saadaan nostettua (Science World, 2022). Oppilaille voi antaa tehtäväksi tehdä ryhmissä pullosoittimet siten, että pulloihin lisätään tasaisin suhtein vettä. Esimerkiksi viiteen pulloon niin, että nesteiden suhteelliset määrät ovat $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{5}{5}$. Näin soitinten tekoon saadaan mukaan mittaamista sekä laskemista.

Pulloon puhaltamisen ohella vastaavaan ilmiöön perustuu myös viivaimen rämpyttely pöytää vasten; mitä pidempi osa viivaimesta on rämpytettävänä, ja siten mitä lyhyempi osa pöytää vasten, sitä matalampi on muodostuva taajuus (Oppimateriaalikeskus OPIKE, 2012, s. 13). Vanhemmille tai musikaalisesti taitaville oppijoille harjoitteita voidaan eriyttää ylöspäin pyytämällä heitä itsenäisesti tai pienryhmissä rakentamaan jokin tuttu melodia, kuten ”Tuiki, tuiki tähtönen” tai muu vastaava.

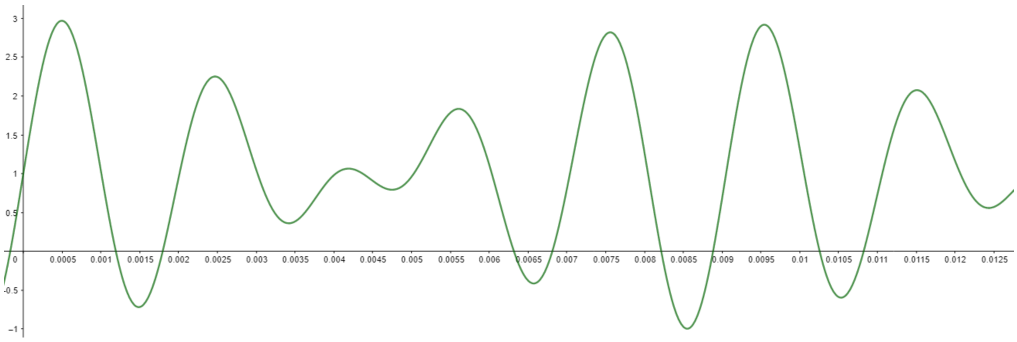
6 Ääniaalloista

Sävel, ja ääni yleensä, on ilmassa etenevää *aaltoliikettä* (Apiola, 2015). Tyypillisin funktio, joka kuvaa ääniaaltoa, on $y = A\sin(2\pi(ft + \phi))$. Funktiossa A on aallon *amplitudi*, joka vastaa äänen kovuutta, f on taajuus, joka kuvaa äänen korkeutta, ϕ kuvaa aallon vaihetta ajassa $t = 0$ ja t kuvastaa aikaa. (Naiman.) Esimerkiksi 440 Hz taajuudella värähtelevä sävel A saadaan ilmaistua funktiolla $y = \sin(2\pi \cdot 440t)$, josta kuvaaja on esitetty kuvassa 11. Mikäli taajuutta korotettaisiin, niin tällöin jakson aika pienenee ja aaltoliike tihenee. (Rogness, 2022.)

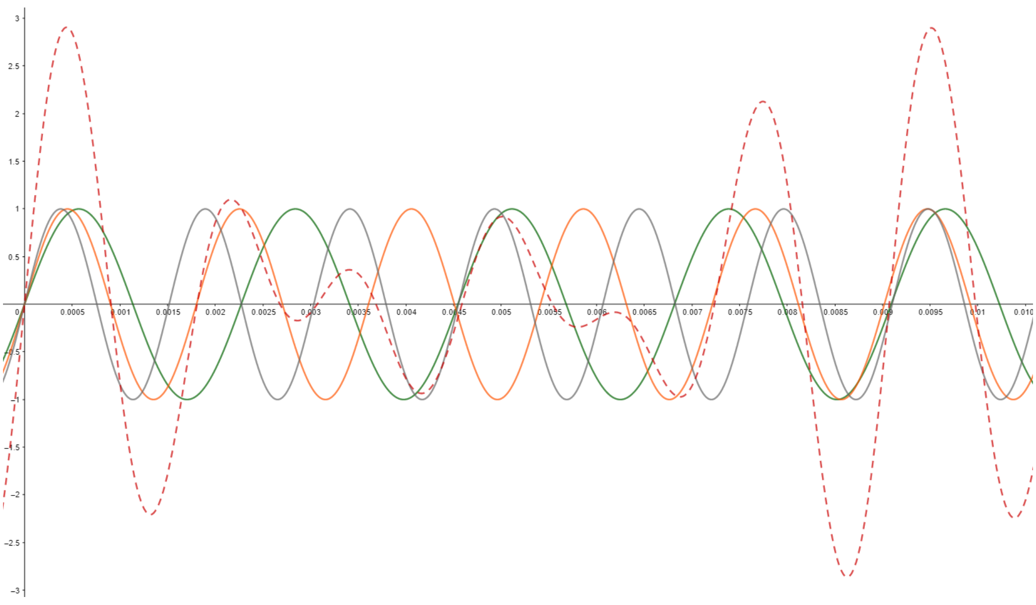


Kuva 11. Sävelen A (440 Hz) aaltoliikettä.

Kun säveliä soitetaan yhtä aikaa, summataan sävelten funktiot yhteen. Tällöin esimerkiksi sävelten A, C# ja E muodostaman A-duurisoinnun aaltofunktio yhdistettynä olisi $y = \sin(2\pi \cdot 440t) + \sin(2\pi \cdot 554{,}36t) + \sin(2\pi \cdot 659{,}25t)$. Tästä löytyy kuvaaja kuvasta 12. Yhdistetyn kuvaajan aaltoliike on selvästi monimutkaisempi, mutta silti siinä on nähtävissä tietty kaavamaisuus. Kuvassa 13 nähdään kaikki kolme aaltoa erikseen ja lisäksi niiden summa katkoviivalla. (Rogness, 2022.)



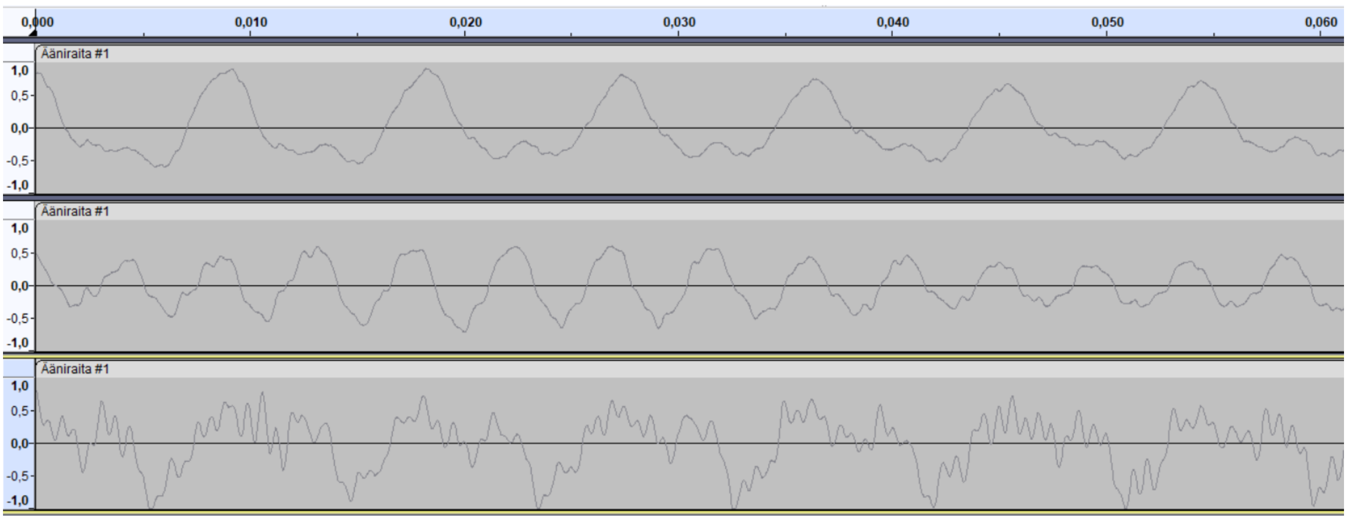
Kuva 12. Sävelet A, C# ja E eli A-duuri yhdistettynä summatuksi aaltofunktioksi.



Kuva 13. Sävelten A, C# ja E tuottamat aaltofunktiot sekä näiden summafunktio katkoviivalla. Kuva havainnollistaa aaltojen konkreettisen summautumisen.

Ääniaaltoja voidaan tutkia oppilaiden kanssa äänittämällä erilaisista soittimista ja tavaroista lähteviä ääniä. Tähän voi käyttää esimerkkinä aiemmin mainittuja vesilaseja, pulloja ja viivaimia sekä koululta löytyviä soittimia. Lisäksi oppijoiden kanssa voi äänittää heidän omaa puhe- tai lauluääntään. Äänittäessä kannattaa soittimia soittaa eri voimakkuudella ja eri korkeuksilla. Esimerkiksi pianoa soittaessa voi kokeilla soittaa yhtä säveltä ja sen jälkeen useampaa säveltä yhtä aikaa. Tämän jälkeen oppilaat voivat tutkia pareittain tai pienryhmissä tuottamiansa ääniaaltoja ja niiden eroja. Mikä ero ääniaalloilla on soitettaessa eri voimakkuuksilla? Mitä eroja löytyy eri taajuuksilla soitetuista tai eri soittimilla äänitetyistä ääniaalloista? Tämä kehittää kuvaajien tulkintaa ja auttaa ymmärtämään aaltofunktioita. Lisäksi tutkimukseen on myös sovellettavissa laskutehtäviä, kuten äänitettävän aallon taajuuden laskemista. Äänitystä varten on saatavilla ilmaisia sovelluksia, kuten Audacity Windowsille.

Kuvassa 14 on äänitetty kitaralla kolme raitaa, joissa on selvästi huomattavissa taajuuksien välinen ero. Tutkitaan sen tilannetta hieman tarkemmin. Matalammalla taajuudella äänitetyn ylimmän raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0090 sekunnin kohdalla, kun taas korkeammalla taajuudella äänitetyn keskimmäisen raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0045 sekunnin kohdalla. Tämä siis tarkoittaa, että keskimmäisellä raidalla sävel soi kaksinkertaisella taajuudella verrattuna ylimpään raitaan. Näiden jaksonpituuksien avulla saadaan laskettua taajuudet $f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}009\ s} \approx 111\ Hz\ ja\ f_2 = \frac{1}{0{,}0045\ s} \approx 222\ Hz$.



Kuva 14. Audacitylla äänitettynä kolme kitararaitaa. Ylimmässä raidassa soi noin 110 Hz taajuudella A-sävel, keskimmäisessä noin 220 Hz taajuudella A-sävel ja alimmassa raidassa sointuna A-duuri, eli vastaavat soinnut kuin kuvassa 12, mutta eri taajuuksilla.

Lisäksi yhden raidan sisältä voidaan havaita äänenvoimakkuuden laskeminen huippujen pienemisenä. Alimman raidan kohdalla on selkeästi havaittavissa monimutkaisempaa aaltoliikettä, joka johtuu siitä, että tällöin kolmen eri sävelen aallot yhdistyvät. Äänitettäessä on hyvä ottaa huomioon, että aallot eivät ole niin puhtaita mitä teoreettisesti, sillä äänitettäessä aaltoon tulee mukaan paljon pieniä häiriötekijöitä, kuten mikrofonin laatu ja taustahäly.

7 Yhteenveto

Musiikin integroiminen matematiikan opetukseen tapahtuu hyvin luonnollisella tavalla, sillä musiikin teoria pohjautuu hyvin vahvasti matematiikkaan. Tämän integraation avulla matematiikan tunteihin saa mukaan konkretiaa; esimerkiksi tutkimalla ääntä siniaaltoihin tutustuessa tai hyödyntämällä nuottien aika-arvoja, tahteja ja tahtilajeja murtolukujen ja niiden laskutoimituksien oppimisen tukena. Parhaillaan musiikki tarjoaa mahdollisuuden matematiikan teoriaan tutustumiseen oppilaiden omakohtaisen tutkimuksen kautta. Tutkimusten kautta uuden asian teorialle saadaan muodostettua hyvä perusta ja lisättyä myös motivaatiota, tukien siis innostavaa ja oppijalähtöistä matematiikan opetusta.

Toki musiikki tai sen tuottaminen itse ei välttämättä motivoi kaikkia oppijoita samalla tavalla, mutta musiikillisen elementin tuominen matematiikan oppitunnille tuo vaihtelua perinteisten oppituntien keskelle. Musiikki voi myös antaa matematiikkaan erilaisen näkökulman. Sen sijaan, että matematiikka olisi merkityksettömiä numeroita, kirjaimia ja symboleita, voi musiikki auttaa ymmärtämään paremmin näiden tarkoituksen. Tästä hyvänä esimerkkinä on toiminnallisuus, jota musiikin kautta saadaan lisättyä matematiikan oppitunneille; esimerkiksi eri kehonosiin taputettavan rytmin kautta päästään käsiksi muun muassa lukujen jaollisuuteen tai tanssin ja laulun lyriikoiden kautta voidaan pienemmille oppijoille tuoda tutuksi numeroita. Mahdollisuuksia ja variaatioita on lähes lukemattomia. Todettakoon siis yhteenvetona, että nämä ja muut musiikin tuomat hyötyvaikutukset, esimerkiksi aivotoiminnalle, antavat perusteita sen mukana kuljettamiseksi läpi oppijan elämän varhaiskasvatuksesta lukiokoulutukseen – kuten musiikki usein kulkee muutenkin arjessa mukanamme aina vauvasta vaariin.

Lähteet

Apiola, H. (2015, lokakuuta 21). *Matematiikkaa ja musiikkia*. http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html

Ellington NHS. (2020, huhtikuuta 21). *How to make music with water glasses! - Ayushman Choudhury*. https://www.youtube.com/watch?v=BcBbRzY20MA

How to Make Science Projects for Kids. (2013, elokuuta 16). How To Make A Water Xylophone—Science Projects. *How To Make Science Projects For Kids*. https://howtomakescienceprojectsforkids.com/how-to-make-a-water-xylophone/

Işıtan, S. I., & Doğan, M. (2020). Mathematics and Music Relationship: From Notes to Fractions. *Journal of Inquiry Based Activities*, *10*(2), 100–111.

Kaperi, P. (2020). *”Enemmän kuin aaltoliikettä” – musiikin ja matematiikan teoreettinen integrointimalli kouluympäristöön*. [pro gradu -tutkeilma: Taideyliopiston Sibelius-akatemia]. https://taju.uniarts.fi/bitstream/handle/10024/6956/nbnfi-fe2020112592945.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Marjanen, J. (2013). *”Ope, miks me lauletaan, vaikka meillä on matikan tunti?”: Musiikin ja matematiikan oppisisältöjen integrointi*. [pro gradu -tutkielma: Jyväskylän yliopisto]. http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-201402261290

Musiikkimatka.fi. (2022, maaliskuuta 10.). *Musiikki kuuluu kaikille ja kaikkialle! - Musiikkimatka.fi*. https://musiikkimatka.fi

Naiman, D. Q. (2022, maaliskuuta 10). *Sound Waves – Mathematics of Music*. https://www.ams.jhu.edu/dan-mathofmusic/sound-waves/

Niemelä, E. (2015). *Sanarytmien vaikutus kuultujen rytmien oppimiseen* [pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/46368/1/URN%3ANBN%3Afi%3Ajyu-201506182379.pdf

Opipistenuotteja.fi. (2022, maaliskuuta 10). *13. Intervallit – OPI PISTENUOTTEJA*. https://www.opipistenuotteja.fi/13-intervallit/

Oppimateriaalikeskus OPIKE. (2012). *Akustiikka*. OPIKE. https://www.opike.fi/files/products/product_365/Paivanselvaa_Akustiikka.pdf

Rajala, J. (2016, lokakuuta 5). *Musiikkikasvatus varhaiskasvatuksessa*. https://prezi.com/cs8sg3q9goug/musiikkikasvatus-varhaiskasvatuksessa/

Rogness, J. (2022, maaliskuuta 10). *Soundwaves*. Noudettu 10. maaliskuuta 2022, osoitteesta https://www-users.cse.umn.edu/~rogness/math1155/soundwaves/

Science World. (2022, maaliskuuta 10). *Musical Bottles*. Science World. https://www.scienceworld.ca/resource/musical-bottles/

Shah, S. (2010). *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music*. http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/cov

Summamutikka. (2022, huhtikuuta 25). *Jaollisuushorisontit*. https://blogs.helsinki.fi/summamutikka/jaollisuushorisontit/

Tamminen, T. (2015). *Orkesterinkone: rytmioppia*. YLE. http://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/11/26/rytmioppia

Vatanen, S. (2015). *Musiikkiako matematiikan tunnilla?* [pro gradu -tutkielma: Helsingin yliopisto]. https://core.ac.uk/download/pdf/33738271.pdf

Wright, D. (2009). *Mathematics and music*. American Mathematical Society.

Itsearvioinnin toteuttaminen alkuopetuksessa ja lukiossa: matematiikan tarjoamat mahdollisuudet

Susanna Toikka[1] ja Lasse Eronen[2]

[1] LUMA-keskus Suomi, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto
[2] Filosofinen tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Arvioinnin painopistettä aina alkuopetuksesta lukioon asti on siirretty opetussuunnitelmien kehittämistyön myötä lopputuloksen arvioinnista koko oppimisprosessin arviointiin eli formatiiviseen arviointiin. Muutos selittyy formatiivisen arvioinnin hyödyillä; sillä on nähty olevan monia oppimista tukevia vaikutuksia. Erityisesti matematiikan näkökulmasta formatiivisen arvioinnin on havaittu tukevan tärkeitä taitoja, kuten ajattelun taitojen syventämistä ja oman toiminnan kriittistä tarkastelua. Formatiivista arviointia voi toteuttaa monin eri keinoin, mutta opettajat ovat kuitenkin usein kokeneet sen toteuttamisen haasteelliseksi käytännön opetustyössään. Tässä artikkelissa nivotaan yhteen, mitä itsearviointi voisi tarkoittaa koulupolun eri vaiheissa. Esittelemme, miten itsearviointia voidaan toteuttaa; tarkastelumme perusteella alkuopetuksessa keskitytään vielä itsearvioinnin perustaan eli reflektiotaitoon, kun lukiossa syvennytään kognitiivisesti haastavampien asioiden äärelle, kuten oman toiminnan, ratkaisustrategioiden ja oppimisen tarkasteluun.

Avainsanat: formatiivinen arviointi, matematiikka, alkuopetus, lukio

Yhteystiedot: susanna.toikka@helsinki.fi

1 Arviointimuutosten pyörteissä

Yksi oppimista merkittävimmin ohjaava ja edistävä tekijä on *arviointi* (Hodgson & Pang, 2012). Siitä syystä opettajat ja arvioinnin kehittäjät ovat suunnanneet huomionsa yhä enenevissä määrin siihen, minkälaisia tavoitteita oppimiselle asetetaan ja miten tavoitteiden saavuttamista voidaan tarkastella. Matematiikan tavoitteissa korostuu oppijan kognitiivisten taitojen kehittäminen niin perusopetuksen (2014) kuin lukion (2019) opetussuunnitelmissa. Tavoitteena on, että oppija kykenee keskustelemaan matematiikasta, perustelemaan väitteitä, hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita sekä ymmärtämään, mitä hän tekee ja miksi näin tekee. Yhteenvetona voi todeta, että matematiikan opetuksen tarkoituksena on kehittää oppijan matemaattista ajatteluprosessia. Tätä varten oppija tarvitsee sellaista arviointia, joka tukee häntä syventämään ajattelun taitojaan.

Oppimisen ja osaamisen arvioinnissa on tehty kehittämistyötä peruskoulu- ja lukio-opetuksen saralla. Opetushallitus on muun muassa uusinut perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden arviointia koskevan luvun. Uusitussa arviointiluvussa oppimista ohjaava ja edistävä arviointi on korostunut (Opetushallitus, 2020). Tarkoituksena on tukea oppilaiden taitoja tarkastella oppimisprosessiaan kokonaisuutena, ei vain sen lopputulosta. Tavoitteena on, että oppilas ottaa askelittain vastuuta omasta oppimisestaan ja sen ohjaamisesta kohti asetettuja tavoitteita. Vastaavasti uudistuneessa lukion opetussuunnitelmassa (2019) oppimisen lopputuloksen eli summatiivisen arvioinnin rinnalla korostuu oppimisprosessin aikainen ohjaava eli *formatiivinen arviointi*. Nykyisin matematiikan kannalta arviointi tulisikin nähdä enemmän matemaattisen ajatteluprosessin osana kuin ajatteluprosessin onnistumista mittaavana toimintona (Eronen, 2019). Kokonaisuudessaan arvioinnin painotus on siirretty oppimisprosesseja tukevaan formatiiviseen arviointiin niin perusopetuksessa kuin lukiossakin.

Matematiikan formatiivista arviointia voidaan toteuttaa usein tavoin. Tässä artikkelissa rajaamme tarkastelun muutamaan itsearvioinnin toteuttamisen tapaan, jotka ottavat huomioon niin alkuopetusikäisen kuin lukiolaisen erityispiirteet. Artikkelissa ensin käsittelemme matematiikan formatiivista arviointia yleisesti, jonka jälleen keskitymme tarkastelemaan ensin itsearviointia ja myöhemmin siinä tarvittavien taitojen tukemista. Tämän jälkeen kuvaamme alkuopetusikäisten reflektiota käsittelevää tutkimustamme. Lopuksi tarjoamme lukion formatiiviseen arviointiin vaihtoehtoisen lähestymistavan Zimmermanin näkemyksiä mukaillen.

2 Matematiikan formatiivinen arviointi

Formatiivinen arviointi kohdentuu nimenomaan oppimisprosessin aikaisiin toimiin (Black & Wiliam, 2009). Sitä voidaan toteuttaa useilla eri menetelmillä, mutta keskitymme tässä artikkelissa nimenomaan *itsearviointiin* ja siinä tarvittaviin taitoihin. Syy tehdylle rajaukselle on yksinkertainen; tutkimusten mukaan itsearviointi kehittää monia matemaatikolle tärkeitä taitoja, kuten taitoa tarkastella omaa toimintaa kriittisesti (Dubinsky & Wilson, 2013; Fuchs ym., 2003; Reinholz, 2016). Arvioinnin näkökulmasta oppijan toteuttamalla itsearvioinnilla viitataan prosessiin, jossa oppija tarkastelee perustellen opiskeluaan ja oppimistaan havaitakseen niissä niin vahvuuksia kuin kehittämisen tarpeita (Andrade & Valtcheva, 2009).

Itsensä arviointi tukee oppimista monin keinoin (esim. Clark, 2012; Lew ym., 2010). Arvioinnin tutkija Clark (2012) huomauttaa, että itsearviointia harjoitellessa oppija oppii säätelemään oppimistaan ja arvioimaan saavuttamiaan tuloksia suhteessa asetettuihin tavoitteisiin. Clark tarkentaa, että nämä taidot johtavat vuorostaan itseohjautuvaan opiskeluun, jossa oppija määrittää oppimisensa tarpeet sekä kontrolloi tavoitteiden toteutumista. Clarkin (2012) mukaan itseään arvioidessa yksilö oppii nimeämään saavutettavia tavoitteita, joiden tavoittaminen lisää motivaatiota. Vastaavasti tavoitteita saavuttaessa oppijan itseluottamus kasvaa, sillä hän osaa tunnistaa omaan oppimiseensa liittyviä vahvuuksia ja kehittämiskohteita (Clark, 2012).

Matematiikan näkökulmasta itsearvioinnin anti kietoutuu *reflektiotaidon* ympärille. Itsearviointi ja reflektio ovat vuorovaikutteisia taitoja; itsearvioinnin harjoitteleminen kehittää reflektiota, mutta toisaalta reflektiota tarvitaan onnistuneen itsearvioinnin toteutumiseen (Andrade & Valtcheva, 2009). Itsensä arvioiminen ja reflektoiminen yhdessä tukevat myös matematiikan opetuksen tavoitetta kehittää oppijan matemaattista ajatteluprosessia (Opetushallitus, 2014, 2019).

Reflektio keskittyy matemaattisen ajattelun kypsymiseen ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymiseen (Reinholz, 2016). Ongelmien ratkaiseminen on paitsi merkityksellinen taito matematiikassa, myös laajemminkin elämässä. Tutkija tarkentaa, että reflektiotaidon kehittyminen vaikuttaa myönteisesti ongelmanratkaisutaitoon, sillä ongelmanratkaisuprosessi sisältää monia reflektiota vaativia toimintoja (Reinholz, 2016). Reflektion myötä vahvistuu myös matematiikan kannalta tärkeä taito tarkastella omaa toimintaa kriittisesti, mikä edistää kontekstin huomioivien ja tarkoituksenmukaisten ratkaisustrategioiden valitsemista sekä niiden käyttämistä käsiteltävän ongelman ratkaisemiseksi (Fuchs ym., 2003). Tällainen menettelytapa auttaa oppijaa ymmärtämään ja ohjaamaan omaa kognitiivista toimintaa (Kramarski ym., 2010).

2.1 Itsearviointi osana formatiivista arviointia

Perusopetuksen nykyisessä arviointikäytännössä oppilaita ohjataan arvioimaan itseään koulun aloittamisesta alkaen. Kuitenkin onnistunut itsearviointi vaatii niin harjoittelua kuin itsearviointitaitojen kehittämistä. Tiedetään, että itsearviointitaidot rakentuvat reflektiolle (Clarà, 2015; Donham, 2010). Siten perusteltua on aloittaa oppijoiden itsearviointitaitojen kehittäminen reflektiosta. Reflektiolla tarkoitetaan tietoista ajatteluprosessia, joka kohdistuu omien tunteiden, ajatusten ja kokemusten tarkastelulle (Clarà, 2015). Taito reflektoida kehittyy useiden vaiheiden kautta, mutta tutkimuksemme on osoittanut harjoittelun aloittamisen perustelluksi juuri omien tunteiden tunnistamisesta ja sanoittamisesta (Eronen & Toikka, 2021).

Näkemyksemme mukaan matematiikkaa käsittelevät aihealueet soveltuvat hyvin reflektion harjoitteluun useasta syystä. Ensinnäkin tunteiden tarkastelu on luonteva osa matematiikan opiskelua, sillä tunteiden merkitys osana matematiikan opiskelua ja erityisesti ongelmanratkaisua on tunnistettu (Hannula, 2015). Toisekseen tutkimuksista tiedetään, että reflektion harjoittelu on suositeltavaa aloittaa aiheesta, josta oppijalla on ennestään runsaasti kokemuksia (Reinholz, 2016). Täten matematiikka luo hedelmällisiä mahdollisuuksia omien tunteiden, ajatusten ja kokemusten reflektoinnille.

Itsearviointitaitojen kehittäminen on pitkä prosessi, joten on erityisen tärkeää aloittaa kehittämisprosessi viimeistään perusopetuksen ensimmäisillä luokilla (Kearney, 2013). Täten opettajan tehtävä itsearviointitaitojen harjoittamisen mahdollistajana korostuu. Harjoittelussa tulisi huomioida erityisesti kaksi tekijää: harjoittelun systemaattisuus (Alaoutinen, 2012) ja oppijan kehitystaso (Goswami & Bryant, 2007). Erityisesti koulupolun alussa olevat oppijat tarvitsevat usein tukea itsearvioinnin harjoittelun aikana.

2.2 Itsearviointitaitojen tukeminen

Itsearviointitaitojen tukemisen lähtökohtana on oppijan kehitystaso. Usein taitojen harjaannuttaminen aloitetaan reflektiosta, sillä esimerkiksi jo tunteiden tunnistaminen ja sanoittaminen voi olla oppilaille haastavaa. Tunteiden sanoittaminen on kuitenkin ensiarvoista, koska muuten oppilaan mielen sisäiset tapahtumat ovat ulkopuoliselle tulkitsijalle epäselviä ja oppilaalle itselleen haastavia ymmärtää (Goswami & Bryant, 2007).

Oppilas saattaa tarvita reflektiota harjoitellessaan niin opettajan läsnäoloa kuin konkretiaa tunteiden tunnistus- ja kielentämisprosessin apuna. Konkretiana voi toimia tarinallisuus (Fleer, 2011) ja mielikuvitus (Duffy, 2009). Duffy (2009) luonnehtii mielikuvituksellisuutta luontaiseksi itseilmaisun keinoksi. Lisäksi tarinoiden kuunteleminen ja kertominen on usein pienille oppijoille miellyttävä toiminnan muoto (Fleer, 2011). Erityisesti pienten oppijoiden kohdalla on tärkeää hyödyntää konkreettista välinettä, kuten *Arviointimaata* (kuva 1), reflektiotilanteessa apuna.

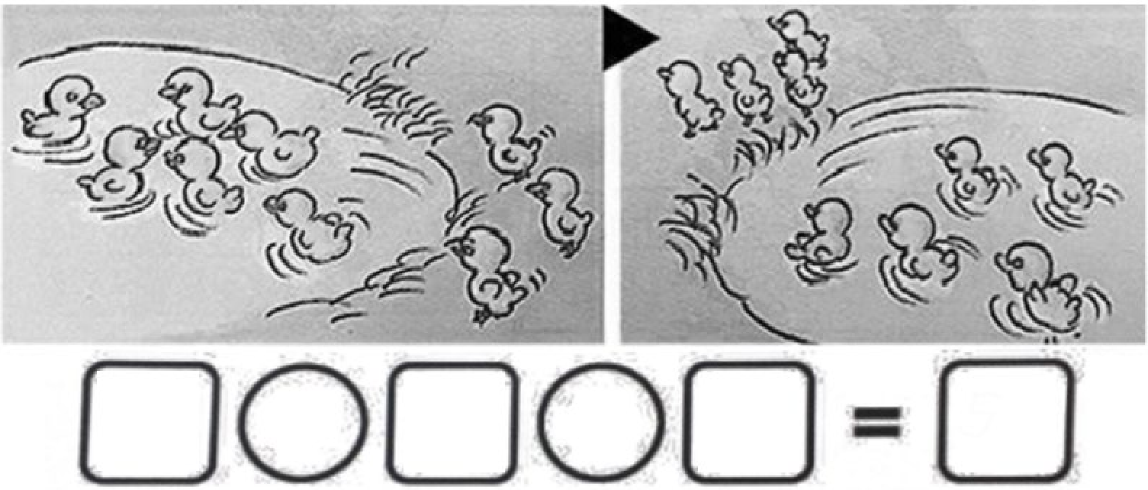
Kuva 1. Arviointimaa © Eero Karvonen / Sharp Dis-Chord

Arviointimaa on mielikuvitusmaailmaan sijoittuva, suurikokoinen kuva. Se on tarkoitettu herättämään ja kuvastamaan erilaisia tunteita ja auttamaan niiden ilmaisemisessa. Arviointimaata käytettäessä oppilas sijoittaa itsensä Arviointimaan kuvamaailmaan pienten siirrettävien merkkien avulla ja kertoo samalla tunteistaan, kokemuksistaan ja ajatuksistaan. Opettaja on tilanteessa läsnä ja voi tarvittaessa esittää oppilaalle ohjaavia kysymyksiä. Arviointimaan konkreettisuus ja kuvan mielikuvitusta ruokkiva yksityiskohtaisuus voivat tukea oppilaiden taitoa käsitellä abstrakteja ilmiöitä, kuten tunteita.

3 Alkuoppilaat reflektoimassa

Tässä luvussa perehdymme alkuopetusikäisten taitoon reflektoida perustuen jo julkaistuun tutkimukseemme (Eronen & Toikka, 2021). Tarkastelimme erään itäsuomalaisen koulun alkuopetusikäisten oppilaiden taitoa reflektoida vuoden 2019 alussa. Luokassa oli yhteensä 23 oppilasta, joista kymmenen oli ensimmäisen vuosiluokan oppilasta ja vastaavasti kolmetoista toisen vuosiluokan oppilasta.

Toteutimme vuorovaikutustilanteen, joka muodostui ongelmaratkaisutehtävän ratkaisemisesta ja sen jälkeisestä haastattelusta. Ongelmanratkaisutehtävässä vaadittiin yhteen- ja vähennyslaskutaitoja (ks. kuva 2). Aikarajoitetta tehtävän ratkaisemiselle ei asetettu, vaan oppilaat käyttivät ongelmanratkaisutehtävän pohtimiseen tarvitsemansa ajan. Tehtävää ratkaistessaan heitä rohkaistiin kertomaan ääneen ajatuksistaan ja mahdollisista ratkaisuvaihtoehdoistaan.



Kuva 2. Käytetty ongelmanratkaisutehtävä (Helsingin Sanomat, 2019). Tehtävänanto: Muodosta laskulauseke kahden kuvan muodostaman kuvasarjan perusteella sekä ratkaise muodostamasi laskulauseke.

Ongelmatehtävää seurasi puolistrukturoitu haastattelu Arviointimaata apuna käyttäen. Oppilailla esitettiin seuraavat kysymykset:

- Kerro Arviointimaan paikkoja käyttäen, miltä äskeinen ongelmanratkaisu tuntui.
- Mihin matematiikan voisi Arviointimaassa sijoittaa ja miksi?
- Miltä matematiikan opiskelu tuntuu?

Tarvittaessa oppilasta pyydettiin kuvaamaan tarkemmin vastaustaan. Esimerkiksi ongelmanratkaisun reflektoinnin yhteydessä oppilaita pyydettiin usein reflektoimaan tunteitaan tarkemmin prosessin eri vaiheissa: prosessin alussa, prosessin tekemisen aikana sekä prosessin lopuksi.

Esittelemme seuraavaksi tarkemmin oppilaiden reflektioita ongelmanratkaisun, matematiikan ja sen opiskelun näkökulmista.

3.1 Tuotetut reflektiot

Oppilaiden reflektioita tarkastellaan yksityiskohtaisemmin alkuperäisessä julkaisussamme (ks. Eronen & Toikka, 2021). Tässä artikkelissa kuvailemme ilmiötä aineistolainauksia käyttäen ilman sisällönanalyysin menetelmiin tukeutumista.

Oppilaat reflektoivat ongelmanratkaisuprosessin herättämiä tunteitaan tunneakselilla helppo–vaikea. Vaikeuden tunnetta oppilaat kuvasivat niin tehtävän alussa (n=10) kuin sen tekemisen aikana (n=4): ”Tää kuvastas [labyrintti], olin kuin labyrintissä, kun ei tienny, mitä piti tehä” (2. luokan poika). Sen sijaan helppouden tunnetta oppilaat kuvasivat kokeneensa tehtävän ratkaisemisprosessin alussa (n=2), sen aikana (n=3) ja lopuksi (n=5), kuten 1. luokan tyttö kuvaa: ”Hmm... no missähän se ukkeli on... Tossa! Täällä niinku hämmentyneenä, miten helppo se tehtävä minusta oli”.

Mielenkiintoista on, että seitsemän oppilasta kuvasi ongelmanratkaisun aikana kokemiaan tunteita prosessin muodossa. He kuvailivat, kuinka kokivat ongelman ratkaisemisen aluksi vaikeuksia, mutta etenivät kohti helppouden tunnetta: ”Olin täs labyrintissa, koska tuntu nii vaikeelta öö... Se ol aika vaikee... Mun tavotteena oli päästä tonne linnaa ja siinä matkan varrella oli vaikeuksii, ku piti kiivetä tonne.” (2. luokan tyttö) Nämä tunnevaihtelut kuvastavat hyvin ongelmanratkaisuprosessin luonnetta, johon liittyy tehtävän ratkaisuprosessin aikana koetut vaikeuden tunteet, jotka purkautuvat tehtävän jälkeisenä tyytyväisyytenä ja koettuina hyvän olon tunteina (Hannula, 2015).

Ongelmanratkaisun lisäksi oppilaita pyydettiin kuvaamaan, minne matematiikan voisi heidän mielestään Arviointimaassa sijoittaa. Näistä perusteluista havaitsimme hyvin monenlaisia tunnereflektioita. Vastauksia voidaan tarkastella kahden tunneakselin avulla: helppous–vaikeus ja tylsyys–kivuus. Useat oppilaat (n=10) kuvasivat vastauksessaan, millaisia tunteita matematiikan opiskelu herättää. Näissä tunnereflektioissa korostui niin helppouden kuin vaikeuden kokemuksia: ”Toi vuoren kärki, koska se tuntuu, että joskus on tuolla alhaalla, niinku ois niinku... Nyt ei mee iha hyvin laskut. Sit ku on täällä ylhäällä, ni sit tuntuu et menisi iha hyvin.” (2. luokan tyttö) Toisaalta matematiikkaa kuvattiin myös niin matematiikan asettamien vaatimusten kuin omien valmiuksien kautta: ”Hmmmh... Ehkä tänne [puuhun], ku mie pystyn mennä sinne. Pystyn kuitenkin selvittää ne tehtävät.” (1. luokan poika)

Lopuksi oppilaita pyydettiin kertomaan, miltä matematiikan opiskelu tuntuu. Oppilaiden vastauksissa oli myönteisiä ja kielteisiä tunnekuvauksia. Myönteiset tunnekuvaukset sisälsivät kivan, helppouden ja rauhallisuuden tunteita. Suurin osa oppilaista kertoi matematiikan opiskelun olevan kivaa: ”Kivalta... Missäs se on? Tossa, mäenlasku! Matikan opiskelu tuntuu aina siltä.” (2. luokan poika) Sen sijaan kielteiset tunnekuvaukset kohdistuivat oppilaan epävarmuuteen omasta taidostaan ratkaista matematiikan tehtäviä: ”Hmm... No toi [kysymysmerkki], koska joskus se tuntuu, on semmossii vaikeit tehtävii, ettei osaa, vaikka opeki neuvois.” (2. luokan tyttö) Kielteisiä kuvauksia oli yhteensä kuusi. Edellisten lisäksi oli kaksi vastausta, joissa oppilas kuvasi matematiikan opiskelun herättävän niin myönteisiä kuin kielteisiä tunteita, kuten 1. luokkalainen tyttö kuvaa: ”Välillä matikka on kivaa, mutta välillä se on niin vaikeeta, etten osaa, vaik opeki auttas.”

Reflektion harjoittelu suositellaan aloitettavaksi ilmiöstä, josta oppilaalla on ennestään paljon kokemusta (Reinholz, 2016). Matematiikka ja matemaattinen ongelmanratkaisu osoittautuivat reflektiolle sopiviksi harjoittelutilanteiksi aiempien kokemusten lisäksi siksi, että matematiikka herättää oppijoissa monenlaisia tunteita. Ongelmanratkaisutilanteella pyrittiin aktivoimaan oppilaissa tunteita, joka osaltaan teki tunteista tietoisia ja näkyviä. Toisaalta matematiikan opiskelusta tuotetut reflektiot sisälsivät rikkaampaa perustelua verrattuna matematiikkaan oppiaineena tai ongelmanratkaisuprosessiin. Matematiikan opiskelusta oppilailla on runsaasti kokemusta (Reinholz, 2016) verrattuna muihin esitettyihin kysymyksiin. Tästä syystä kysymys näyttäisi kuvaavan paremmin oppilaan ajatuksia ja olevan muita kysymyksiä helpompi reflektoitava.

3.2 Arviointimaan tuki

Tiedetään, että reflektio on prosessina haastavaa sen abstraktiuden ja kognitiivisen vaativuuden vuoksi (Clarà, 2015). Tästä syystä reflektion harjoittelussa tulisi kiinnittää erityistä huomiota oppilaan tukemiseen (Goswami & Bryant, 2007). Tässä artikkelissa esitellyt oppilashaastattelut puoltavat tutkimustuloksia siitä, että reflektio on haasteellista nuorille oppijoille. Alkuopetusikäisten reflektiotaito näyttää olevan vielä vähäsanaista tunteiden kuvausta. Kuitenkin omien tunteiden tunnistamista ja sanoittamista varten Arviointimaa näyttää olevan hyödyllinen väline.

Vastauksissa on havaittavissa, että Arviointimaa innosti alkuoppilaita reflektoimaan, mutta se myös konkretisoi abstrakteja tunteita ja siten useissa tilanteissa täsmensi reflektion sisältöä. Merkityksellistä on, että Arviointimaan konkreettisen kuvan avulla jokainen haastateltu alkuopetusikäinen oppilas pystyi havainnollistamaan omia tunteitaan.

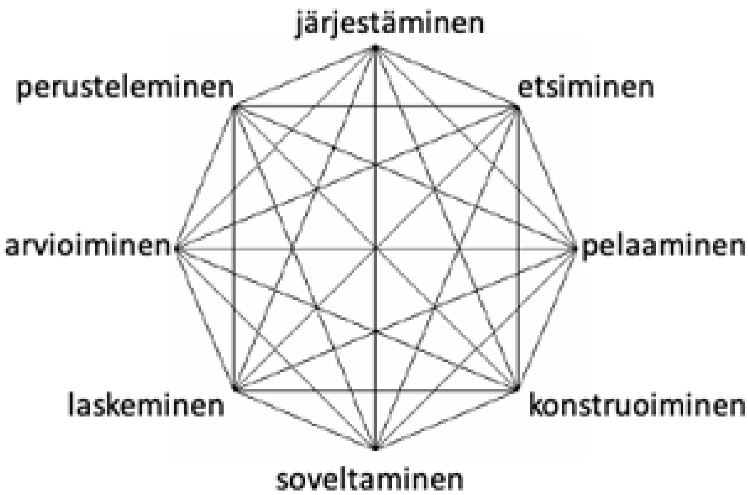
Mielikuvitusmaailma tarjosi henkilökohtaisen kokemuksen, jota hyödyntämällä voi tunnistaa ja ilmaista omia tunteitaan sekä siten harjoitella reflektiotaitoa. Arviointimaan mielikuvitukseen perustuva narratiivisuus lisää harjoittelun mielekkyyttä. Käytännössä Arviointimaa ja sen eri paikat herättivät mielikuvia, jotka muodostuivat esimerkiksi erään kakkosluokkalaisen kertomukseksi näin: ”Olin täs labyrintissa, koska tuntu nii vaikeelta... Se ol aika vaikee... Mun tavoitteena oli päästä tonne linnaa ja siinä matkan varrella oli vaikeuksii, ku piti kiivetä tonne [vuori]".

Arviointimaan lähtökohtaisena ajatuksena on ollut oppilaan maailman hyödyntäminen reflektioiden tuottamisessa. Oppilaan maailma ajateltiin näyttäytyvän enemmän mielikuvitusmaailmana kuin todellisena koulumaailmana. Mielikuvitusmaailman hyödyntämisen ajateltiin innostavan oppilaan reflektion pariin, mutta myös tukevan tunteiden sanallistamista. Alkuoppilaiden vastaukset antavat viitteitä siitä, että tässä on onnistuttu. Erityisesti tunteiden kuvaaminen mielikuvitusmaailman tarjoamalla tuella näyttää edesauttavan oppilaan reflektiotaidon kehittymistä.

4 Arviointi matematiikan tekemisen keskeinen aktiviteetti

Seuraavaksi artikkelissa paneudutaan lukion matematiikan arviointiin, joka on perinteisesti nähty oppimisen lopputuloksen arviointina. Toisenlaisen näkökulman aiheeseen tarjoaa Bernd Zimmerman (2003); kun arviointia tarkastellaankin aktiviteettina ja prosessina, avautuu uudenlaisia mahdollisuuksia toteuttaa sitä.

Matematiikan historian tutkimusta tehneen professori Zimmermannin tavoitteena oli ymmärtää matematiikan syntyprosessia tai oikeammin sitä, miksi matematiikka on kehittynyt. Vuonna 2003 hän julkaisi artikkelin matematiikan kehittymiseen johtaneista motivaatioista sekä kahdeksasta aktiviteetista, jotka hänen mukaansa ovat vaadittu ja toisaalta riittäneet nykymuotoisen matematiikan kehittymiseen (kuva 3). Zimmermannin (2003) mukaan matematiikka kehittyy näiden *aktiviteettien verkossa*, ja näin ollen matematiikan monipuolinen harrastaminen edellyttäisikin tilanteita, joissa aktiviteetteja tulisi käytetyksi monipuolisesti.



Kuva 3. Matematiikan kehittymisen aktiviteettiverkko (Zimmerman, 2003)

Yksi aktiviteettiverkon aktiviteeteista on arviointi. Arviointi on siis matematiikan harrastamisen kannalta keskeinen aktiviteetti, joka osaltaan on ollut mahdollistamassa nykymuotoisen matematiikan kehittymisen. Aktiviteettina se täytyy kuitenkin ymmärtää hivenen arkimerkitystään laajemmin: pikemmin matemaattisen ajatteluprosessin osana kuin ajatteluprosessin onnistumista mittaavana aktiviteettina.

Arviointi on matematiikkaharrastajalle keskeinen tulosten ja päätelmien oikeellisuuden arvioinnissa. Zimmermannin (2003) mukaan arvioinnin aktiviteetti pitää sisällään yhteisöllisen arvottamisen ja sen, miten kautta historian erilaiset vallassa olleet mahdit ovat määrittäneet suotavan matematiikan harrastamisen sisällöt. Kaikessa laajuudessaan aktiviteetin kehittämisen tukeminen koulussa vaatii siis formatiivisten arviointimuotojen lisäksi tiedon ja tietolähteiden luotettavuuden arviointia.

4.1 Arviointi lukiomatematiikan aktiviteettina

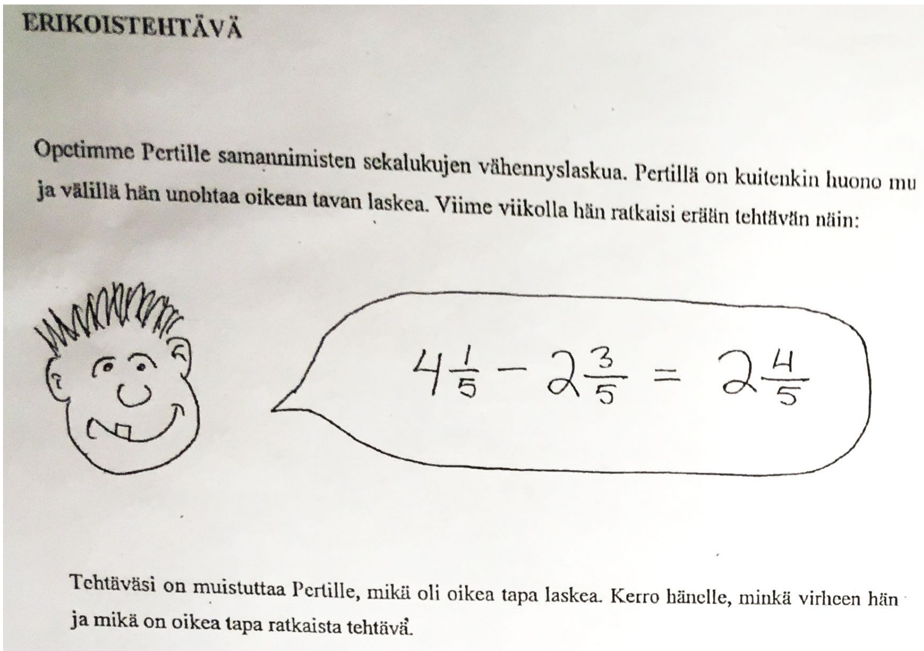
Lukiomatematiikassa arvioinnin monimuotoisuus on korostumassa. Nykyisin lukion arvioinnissa huomioidaan aiemmin korostuneen symbolikielen rinnalla myös muut tavat, joilla opiskelija voi tuoda esille matemaattista ajatteluaan ja sen kehittyneisyyttä (Opetushallitus, 2019). Myös lukiomatematiikassa käytettävät tehtävätyypit edellyttävät matemaattisen ajattelun joustavuutta asettamalla esimerkiksi erilaiset ratkaisumahdollisuudet vertailun kohteeksi. Tästä esimerkkinä vaikkapa kevään 2022 ylioppilaskirjoituksien tehtävä 2 niin pitkän kuin lyhyen matematiikan kirjoituksissa (Ylioppilastutkintolautakunta, 2022).

Matematiikan osaamista on myös kyky arvioida ongelmanratkaisussa käytettävien strategioiden kirjoa ja niiden käyttökelpoisuutta erilaisissa tilanteissa. Entäpä, jos lukiomatematiikan opetuksessa arviointia tarkasteltaisiinkin matematiikan harjoittamisen aktiviteettina? Miten järjestää oppilaille sellaisia matematiikan harrastamisen tilanteita, joissa heidän arviointitaitonsa kehittyisivät siten, että ne palvelisivat vahvasti myös matematiikan harjoittamista?

Yksi keskusteluissa esiin noussut näkökulma on ratkaistavaksi päätyvien tehtävien valitseminen. Opettajien kokemuksen mukaan näyttää siltä, että varsin monesti oppilaat ottavat tarkasteluun tehtävän numerojärjestyksessä tai sattumanvaraisesti. Oppilaiden olisikin hyvä tarkastella tehtävien tekemistä siitä realiteetista, ettei aika todellisuudessa tule riittämään kaikkien tarjolla olevien tehtävien tekemiseen, vaan jokainen tehtävä on valintatilanne: ”Kun valitsen tämän tehtävän, valitsen samalla pois joukon muita tehtäviä, koska aikaresurssini on rajallinen. Miksi juuri tämän tehtävän tekeminen on minulle tärkeää?” Toisekseen arviointitaitoa ja samalla matematiikan kirjoittamisen taitoa voi kehittää niin sanotuilla *etsi virhe -tehtävätyypeillä*.

4.2 Etsi virhe -tehtävä arviointitaidon kehittäjänä

Etsi virhe -tehtävätyypin tehtävässä tarkastellaan valmiiksi ratkaistua ongelmaa ja tutkitaan päättelyn oikeellisuutta. Kuvissa 4 ja 5 on ensimmäisiä tämän artikkelin toisen kirjoittajan toteuttamia etsi virhe -tehtävätyyppiä jäljitteleviä opetuskokeiluja. Kuva 4 on vuodelta 1998, jolloin tehtävää kokeiltiin neljännen luokan oppilaiden sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskujen opiskelussa. Tehtävää käytettiin ensin oppitunneilla ja myöhemmin kokeessa (kuva 4), josta kaksi vastausesimerkkiä (kuva 5) on otettu. Vaikka tuolloin tehtävää käytettiin alakoulun opetuksessa, osoitamme tässä artikkelissa sen hyödyn myös lukio-opetuksessa.

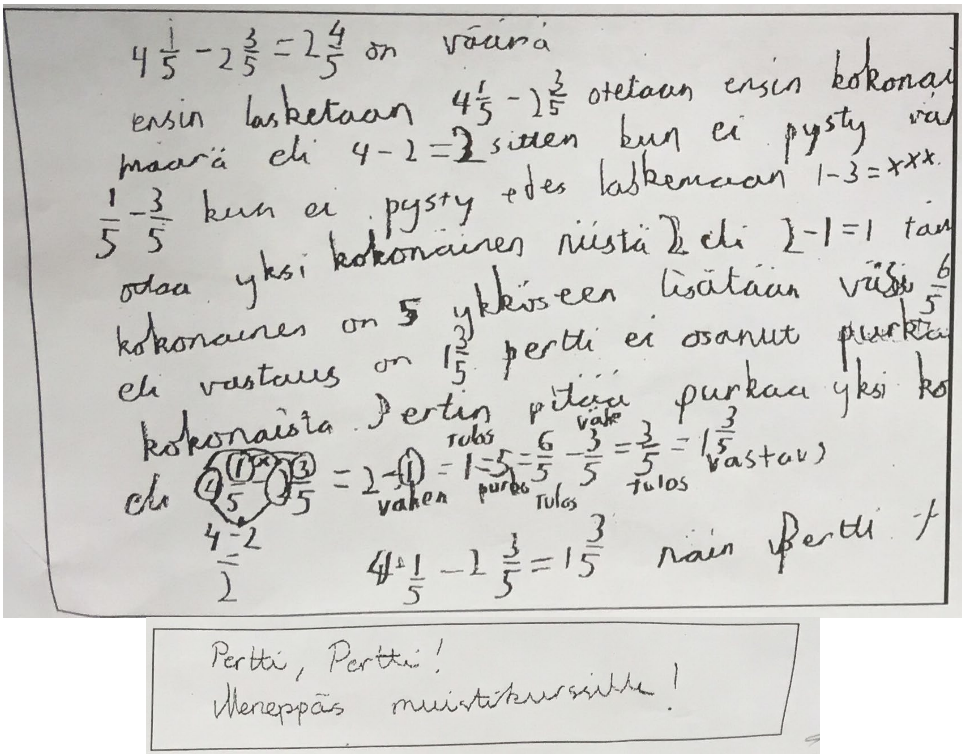


Kuva 4. Etsi virhe -tehtävä neljännen vuosiluokan kokeesta vuodelta 1998

Oppilaiden vastaukset olivat ajatuksia herättäviä. Kuvan 5 vastausesimerkkeinä on kaksi vastausta, joista yhdessä oppilas kehottaa Perttiä menemään muistikurssille ja puolestaan toisessa oppilas paneutuu varsin analyyttisesti Pertin ongelmaan. Vastaukset kertovat mielenkiintoisella tavalla sekä etsi virhe -tehtävän tuottamasta emotionaalisesta tuesta kuin toisaalta myös siitä, millainen kuva koulumatematiikasta välittyi 4. luokan oppilaalle ainakin vuonna 1998. Pidempi virhettä tarkasteleva vastaus kuului oppilaalle, jolla oli vaikeuksia matematiikan opiskelussa:

"$4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2\frac{4}{5}$ on väärä. Ensin lasketaan $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}$. otetaan ensin kokonaismäärä eli $4 - 2 = 2$. Sitten kun ei pysty $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$ kun ei pysty edes laskemaan $1 - 3 = xxx$ otetaan yksi kokonainen niistä 2 eli $2 - 1 = 1$. Tässä kokonainen on 5 ykköseen lisätään viisi $\frac{6}{5}$ eli vastaus on $1\frac{3}{5}$. Pertti ei osannut purkaa kokonaista. Pertin pitää purkaa yksi kokonainen eli $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2 - 1\ (vähenee) = 1 - 5\ (putoo) = \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\ (tulos) = 1\frac{3}{5} (vastaus)$. Näin Pertti."

Tästä kokeesta hän sai arvosanan 7, mikä oli menestys aikaisempaan. Sitä vastoin toinen lyhyt muistikurssille kannustava vastaus "Pertti, Pertti! Meneppäs muistikurssille!" kuului oppilaalle, jonka matematiikan arvosana oli 10. Vastauksen perusteella näyttäytyi, että ulkoa-opettelu oli ollut avain menestykseen koulumatematiikassa.


$4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2\frac{4}{5}$ on vääarä
ensin lasketaan $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}$ otetaan ensin kokona
määrä eli $4-2=2$ sitten kun ei pysty va
$\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$ kun ei pysty edes laskemaan $1-3=xxx$
otaa yksi kokonainen niistä 2 eli $2-1=1$ tas
kokonainen on 5 ykköseen lisätään viisi $\frac{6}{5}$
eli vastaus on $1\frac{3}{5}$ pertti ei osannut purka
kokonaista. Pertin pitää purkaa yksi ko
eli $4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 2-1 = 1-5 = \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$ vähen putoo tulos vähe tulos tulos vastaus
$4-2 = 2$
$4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$ näin pertti

Pertti, Pertti!
Meneppäs muistikurssille!

Kuva 5. Kahden neljännen luokan oppilaan vastaukset koetehtävään. Ylempi vastaus on oppilaan, jolle matematiikan opiskelu oli haasteellista. Vastaavasti alempi vastaus on niin sanotun "kympin oppilaan".

Jo ensimmäisten opetuskokeilujen aikaan syntyi ajatus tehtävän tuomasta *emotionaalista tuesta* omien virheiden tarkastelulle. Kun tarkastelun kohteeksi otetaan yleisesti tehtävä virhe tai matemaattisen esityksen puutteellisuus (kuten ylioppilaskirjoituksiin valmistautumisessa myöhemmin tätä tehtävää on käytetty), oppilas voi ryhmän tukemana peilata omaa käsitystään asiasta ja näin kehittää omaa ajatteluansa.

Järjestimme lukion 2. vuosiluokan opiskelijoille (n=88) mahdollisuuden vertailla etsi virhe -tyypin tehtävän mieluisuutta verrattuna kahteen toisenlaiseen tehtävään, joista toisessa mitattiin algoritmin hallintaa perinteisessä laskutehtävässä ja toinen oli sanallinen tehtävä, jonka suorittaminen edellytti käsitteen soveltamista (Eronen ym., 2021). Tehtävien aihealueena oli yhtälöparin ratkaisu ja kohderyhmä koostui erään lukion pitkän matematiikan analyyttisen geometrian kurssille (vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteiden kurssi MAA5; vastaa nykyisessä vuoden 2019 opetussuunnitelmassa kurssin MAA4 sisältöjä) osallistuneista opiskelijoista. Opiskelijoita pyydettiin arvioimaan erilaisten tehtävien ominaisuuksia ja omaa osaamistaan kouluarvosanoin. Tutkimus paljasti, että alle kahdeksalle opiskelijalle mieluisin tehtävä oli laskutehtävä ja vastaavasti epämieluisin sanallinen tehtävä. Sen sijaan yli kahdeksan opiskelijaa suosi näitä tehtäviä päinvastaisesti. Etsi virhe -tehtävä yhdisti eri osaamistason opiskelijoita. Sitä pidettiin kiinnostavana erilaisuutensa vuoksi, mutta toisaalta myös helpommin ymmärrettävänä ja opettavaisempana kuin sanallista tehtävää.

Artikkelin toisen kirjoittajan meneillään olevissa muissa tutkimuksissa etsi virhe -tehtävien soveltuvuutta on tutkittu niin luokanopettajaopiskelijoiden matematiikan opiskelussa kuin yliopistomatematiikan aineopinnoissakin. Luokanopettajaopiskelijoiden osalta etsi virhe -tehtävät edesauttavat käsitteellistä osaamista edellyttävien tehtävien tekemisestä suoriutumista, mikä näkyy selvästi pienempänä tehtävän tekemisen keskeyttäneiden määränä verrattuna muiden tehtävätyyppien opiskeluun. Vastaavasti matematiikan pääaineopiskelijoiden reaalianalyysin opintojaksolla opiskelijat kokivat etsi virhe -tehtävät vaikeiksi, mutta opettavaisiksi, ja ennen kaikkea matematiikasta keskustelua edesauttaviksi tehtäviksi.

> ”Opiskelijoiden kokemuksen mukaan tämä jälkimmäinen arviointivaihe osoittautui jopa ratkaisuvaihetta huomattavasti opettavaisemmaksi. Opiskelijat huomasivat, mihin muistisääntöjä voi hyödyntää ja erityisesti, että matematiikalla saatiin tehtävä helpommaksi.” (Eronen, 2019.)

Yllä oleva lainaus on lukion arviointiin kohdistuneen LUMATIKKA-koulutukseen osallistuneelta opettajalta. Koulutuksessa opettajat sovelsivat etsi virhe -tehtävätyyppiä. Opettajat antoivat omille lukion matematiikan opiskelijaryhmilleen (2–3 opiskelijaa ryhmässä) tarkasteltavaksi täysin anonymisoituja toisten oppilasryhmien ratkaisuja. Ryhmien tehtävänä oli siis tarkastella ratkaisun oikeellisuutta ja perustelujen riittävyyttä. Opettajien keräämä opiskelijapalaute tehtävästä tuotti rohkaisevan kuvan tehtävän toimivuudesta arviointiaktiviteetin kehittäjänä.

5 Opettaja mahdollistamassa

Matematiikka tarjoaa formatiiviselle arvioinnille moninaisia ja antoisia mahdollisuuksia. Se, millaisin menetelmin ja keinoin formatiivista arviointia toteuttaa, riippuu monestakin tekijästä. Merkityksellisintä on kuitenkin toteuttaa formatiivista arviointia monipuolisin ja oppijoita innostavin keinoin, sillä näin parhaiten tuetaan oppimista ja tavoitteiden saavuttamista.

Opetussuunnitelmien perusteet (Opetushallitus, 2014, 2019) ohjaavat opettajia tukemaan oppijoiden matemaattisia ajattelun taitoja läpi koulupolun. Näiden taitojen tukeminen mahdollistuu erityisesti formatiivisen arvioinnin keinoilla. Tällöin opettajan vastuuta kyseisten taitojen harjoittelun mahdollistajana on korostettava. Jotta ajattelun taidot kehittyvät, on niitä tuettava monipuolisilla keinoilla systemaattisesti. Käytännössä haasteelliseksi on kuitenkin osoittautunut, miten kyseisiä taitoja harjaannuttaa.

Artikkelissa esittelemämme tutkimukset ja omakohtaiset kokemukset antavat viitteitä siitä, että läpi koulupolun toteutettavassa ajattelun taitojen harjaannuttamisessa tulisi huomioida 1) välineen tuki (kuten Arviointimaan käyttö) ja 2) menetelmällinen tuki (kuten etsi virhe -tehtävätyyppi). Niin välineelle kuin menetelmälle yhteistä on sisältö; Arviointimaassa merkityksellistä on se, millaisin kysymyksin oppilasta pyydetään reflektoimaan ja vastaavasti etsi virhe -tehtävissä merkityksellistä on, millaista matemaattista sisältöä tehtävä harjaannuttaa. Toivomme, että tämä artikkeli vastasi joihinkin formatiivista arviointia käsitteleviin kysymyksiin ja havainnollisti formatiivista arviointia koulupolun eri asteilla sekä siten tukee opettajia käytännön työssään. Ikäkausikohtaiset LUMATIKKA 2 -kurssit tarjoavat lisää käytännönläheistä tietoa matematiikan arvioinnista.

Lähteet

Alaoutinen, S. (2012). Evaluating the effect of learning style and student background on self-assessment accuracy. *Computer Science Education, 22*(2), 175–198. https://doi.org/10.1080/08993408.2012.692924

Andrade, H., & Valtcheva, A. (2009). Promoting learning and achievement through self-assessment. *Theory Into Practice, 48*(1), 12–19. https://doi.org/10.1080/00405840802577544

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. E*ducational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Clarà, M. (2015). What is reflection? Looking for clarity in an ambiguous notion. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 261–271. https://doi.org/10.1177/0022487114552028

Clark, I. (2012). Formative assessment: Assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review, 24*(2), 205–249. https://doi.org/10.1007/s10648-011-9191-6

Donham, J. (2010). Creating personal learning through self-assessment. *Teacher Librarian, 37*(3), 14–21.

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 83–101. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.001

Duffy, B. (2009). *Supporting creativity and imagination in the early years*. Open University Press.

Eronen, L. (2019, lokakuuta 7). Arviointi ja lukiomatematiikka. *Dimensiolehti*. Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti. https://dimensiolehti.fi/arviointi-ja-lukiomatematiikka/

Eronen, L., & Toikka, S. (2021). Alkuopetusikäisen valmius reflektoida matemaattisessa ongelmanratkaisutilanteessa. *FMSERA Journal, 4*(1), 1–15.

Eronen, L., Viholainen, A., & Kolström, M. (2021). Matematiikan opiskelumotiivien yhteys itse valittujen tehtävien tiedonalapainotukseen. *FMSERA Journal, 4*(1), 75–89.

Fleer, M. (2011). 'Conceptual play': Foregrounding imagination and cognition during concept formation in early years education. *Contemporary Issues in Early Childhood, 12*(3), 224–240. https://doi.org/10.2304/ciec.2011.12.3.224

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade student' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 95*(2), 306–315.

Goswami, U. C., & Bryant, P. (2007). Children's cognitive development and learning. P*rimary Review, University of Cambridge Faculty of Education*.

Hannula, M. (2015). *Emotions in problem solving*. Teoksessa Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (s. 269–288). Springer.

Helsingin Sanomat. (2019, heinäkuuta 1). *Osaatko ratkoa nämä Kiinan kuusivuotiaiden matematiikan tehtävät?* https://www.hs.fi/ulkomaat/art-2000005955375.html

Hodgson, P., & Pang, M. Y. C. (2012). Effective formative e-assessment of student learning: A study on a statistics course. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 37*(2), 215–225. https://doi.org/10.1080/02602938.2010.523818

Kearney, S. (2013). Improving engagement: The use of 'authentic self-and peer-assessment for learning' to enhance the student learning experience. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 38*(7), 875–891. https://doi.org/10.1080/02602938.2012.751963

Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? ZDM, 42(2), 179–193. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0202-8

Lew, M. D. N., Alwis, W. A. M., & Schmidt, H. G. (2010). Accuracy of students' self-assessment and their beliefs about its utility. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 35*(2), 135–156. https://doi.org/10.1080/02602930802687737

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014:96. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Opetushallitus. (2019). L*ukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Määräykset ja ohjeet 2019:2a. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

Opetushallitus. (2020). *Oppilaan oppimisen ja osaamisen arviointi perusopetuksessa*. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 muutokset. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen-arviointiluku-10-2-2020_1.pdf

Reinholz, D. (2016). The assessment cycle: A model for learning through peer assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 41(*2), 301–315. https://doi.org/10.1080/02602938.2015.1008982

Ylioppilastutkintolautakunta. (2022). *Matematiikan ylioppilastehtävät*. https://info.ylioppilastutkinto.fi/2022K/df02083e9afe4d14ad8ac5594262d98b/index.html

Zimmerman, B. (2003). *On the genesis of mathematics and mathematical thinking – a network of motives and activities drawn from the history of mathematics*. Teoksessa Towards Meaningful Mathematics and Science Education (s. 29–47).